

KLASIFIKASI RANCANGAN FAKTORIAL PECAHAN JENUH TIGA TARAF DALAM 27 RUN

Bagus Sartono

Departemen Statistika FMIPA IPB

Email : bagusco4@yahoo.com

Abstrak

Tulisan ini memberikan klasifikasi terhadap gugus rancangan jenuh tiga faktor OA(27, 3¹³) yang berguna dalam penentuan rancangan terbaik untuk diterapkan. Kriteria A3 dan A4 tidak dapat digunakan karena memiliki nilai yang sama untuk seluruh array. Dengan mengasumsikan hanya ada tiga faktor yang aktif, kriteria projection aberration menggunakan vektor A3(3) mengelaskan 68 OA yang non-isomorphic ke dalam 54 kelas. Dua array terbaik menurut kriteria ini ditampilkan sebagai rujukan untuk digunakan.

Kata kunci: rancangan jenuh, orthogonal array, klasifikasi, projection aberration

PENDAHULUAN

Rancangan faktorial pecahan (*fractional factorial*) menjadi pilihan dalam pelaksanaan banyak penelitian percobaan yang melibatkan banyak faktor dan terkendala sumber daya untuk melibatkan seluruh kombinasi taraf-tarafnya. Alih-alih menerapkan semua kombinasi, rancangan ini hanya bekerja dengan sebagian kemungkinan saja. Dengan hanya melibatkan sebagian saja maka ada dua hal terkait dengan analisis yang kurang menguntungkan yaitu (1) tidak semua pengaruh utama dan interaksi dapat diduga, (2) terjadi pembauran (*confounding*) antar pengaruh. Dua masalah ini tidak muncul pada rancangan faktorial lengkap.

Kelompok khusus penelitian percobaan yang menggunakan rancangan faktorial pecahan adalah percobaan pendahuluan untuk menyaring faktor-faktor yang pengaruhnya kuat dan akan diteruskan untuk percobaan lanjutan. Percobaan demikian sering disebut sebagai *screening experiment*. Pada percobaan ini umumnya peneliti hanya tertarik melihat pengaruh utama saja. Dengan demikian, tidak diperlukan banyak kombinasi, tetapi cukup banyak untuk menduga seluruh pengaruh utama. Rancangan yang dapat digunakan dikenal sebagai rancangan jenuh (*saturated design*). Pada rancangan ini seluruh derajat bebas habis digunakan untuk

menduga pengaruh utama dan rata-rata umum (Wu dan Hamada, 2000).

Untuk rancangan yang melibatkan faktor-faktor dengan dua faktor, rancangan Plackett-Burman menjadi pilihan banyak orang. Rancangan ini melibatkan n run (kombinasi perlakuan) yang melibatkan $(n - 1)$ faktor dua taraf. Dari sebanyak n runs tadi, $(n - 1)$ derajat bebas digunakan untuk menduga pengaruh utama dan satu lagi sisanya untuk rata-rata umum. Agar semua pengaruh umum dapat diduga dengan saling bebas, maka antar kolom harus bersifat saling ortogonal. Penggunaan *orthogonal array* (OA) dapat digunakan untuk menentukan kombinasi perlakuan dalam suatu rancangan.

Sementara untuk rancangan yang melibatkan tiga taraf, Lam dan Tonchev (1996; 2000) telah mempublikasikan 68 *non-isomorphic orthogonal array* berukuran 27 run dan 13 faktor, yang dinotasikan OA(27, 3¹³). Karena masing-masing pengaruh utama memiliki derajat bebas sebesar dua, maka dibutuhkan 26 derajat bebas untuk menduga seluruh pengaruh utama dan satu lagi sisanya untuk rata-rata umum. Dengan demikian OA(27, 3¹³) dapat digunakan sebagai rancangan jenuh tiga taraf dalam 27 run.

Tulisan ini bermaksud memberikan klasifikasi terhadap 68 array tersebut yang berupa pemeringkatan dan memberikan rekomendasi array

mana yang sebaiknya digunakan dalam melaksanakan suatu percobaan.

Skema dari tulisan ini akan diawali dengan penjelasan singkat mengenai orthogonal array. Selanjutnya akan dipaparkan metode klasifikasi yang akan digunakan, yang selanjutnya diikuti dengan hasil dari klasifikasi terhadap 68 OA(27, 3¹³) yang dihasilkan oleh Lam dan Tonchev (1996).

ORTHOGONAL ARRAY

Meskipun Rao (1947) memberikan beberapa hal penting mengenai OA, namun penggunaan dan pembahasan OA dalam perancangan percobaan secara luas mulai berkembang pada tahun 1990an ketika rancangan faktorial pecahan non-reguler mulai banyak dilirik oleh para peneliti. Sebelumnya, para peneliti terpaku pada rancangan faktorial pecahan. Namun karena dengan rancangan tersebut tidak cukup leluasa dalam menentukan jumlah run, maka pilihan kepada rancangan non-reguler menjadi terbuka.

Hedayat, Sloane, dan Stufken (1999) memberikan penjelasan komprehensif mengenai OA dan cara membangkitkannya. Dalam Bab 11 di buku tersebut juga dipaparkan berbagai aplikasi dan kaitan OA dengan perancangan percobaan.

Andaikan terdapat susunan n baris dan m kolom, dimana setiap kolom terdiri atas s buah simbol atau nilai. Umumnya digunakan nilai 0, 1, ..., $(s - 1)$ untuk menuliskan simbol tersebut. Susunan tersebut dinamakan OA(n, s^m, t) jika kita ambil t kolom maka seluruh s^t kombinasi terdapat dalam jumlah yang sama banyak. Dalam bahasa lain juga bisa dikatakan bahwa jika kita ambil sembarang t buah kolom maka kita akan memperoleh rancangan faktorial lengkap s^t , bahkan mungkin dengan ulangan. Nilai t dikenal sebagai *strength* dari OA. Untuk $t = 2$, umumnya tidak dituliskan, sehingga notasinya menjadi OA(n, s^m).

Ilustrasi berikut diharapkan dapat memperjelas uraian di atas. Perhatikan susunan atau array 9 baris dan 4 kolom berikut

0	0	0	0
0	1	2	1
0	2	1	2
1	0	2	2
1	1	1	0
1	2	0	1
2	0	1	1
2	1	0	2
2	2	2	0

Setiap kolom memiliki 3 buah nilai 0, 1, dan 2. Dari susunan di atas, jika kita ambil sembarang dua kolom maka seluruh 9 kombinasi ada sebanyak 1 kali.

Berbeda dengan susunan yang kedua berikut ini

0	0	0	0
0	1	2	1
0	2	1	2
1	0	0	2
1	1	1	0
1	2	2	1
2	0	1	1
2	1	0	2
2	2	2	0

Jika kita ambil dua kolom yaitu kolom 2 dan ketiga, maka kita dapatkan bahwa kombinasi (0, 0) dan (2, 2) muncul dua kali, (0, 2) dan (2, 0) tidak muncul, dan sisanya muncul satu kali.

Susunan yang pertama adalah sebuah OA, sedangkan yang kedua bukan. Simbol 0, 1, 2 pada susunan di atas dapat diganti dengan kode taraf masing-masing faktor untuk dapat menjadi suatu tabel rancangan percobaan.

Pada susunan OA, kita bisa dapatkan bahwa untuk setiap taraf faktor, semua taraf faktor lain ada dengan jumlah yang sama banyak. Karena itu maka antar kolom bersifat ortogonal. Dan dengan demikian maka setiap pengaruh utama suatu faktor dapat diduga secara bebas terhadap pengaruh utama faktor lain.

Perancang percobaan dapat memanfaatkan katalog OA yang dikumpulkan oleh beberapa peneliti, seperti yang dimiliki oleh SAS pada <http://support.sas.com/techsup/technote/ts723.html>.

Seperti yang telah disampaikan pada bagian pendahuluan bahwa Lam dan Tonchev (1996; 2000) telah mempublikasikan 68 non-isomorphic OA(27, 3¹³). Dua array disebut non-isomorphic jika salah satunya tidak dapat diperoleh melalui permutasi baris, kolom, atau simbol dari array yang lain.

Array-array tersebut terdiri atas 13 kolom tiga taraf, sehingga dapat dipandang sebagai tabel rancangan yang melibatkan 13 faktor tiga taraf. Karena antar faktor bersifat ortogonal maka pengaruh utama dapat diduga dengan saling bebas terhadap dugaan pengaruh utama yang lain. Setiap pengaruh utama memiliki 2 derajat bebas, dan diperlukan 26 derajat bebas untuk menduga semua 13 pengaruh utama. Dengan jumlah run sebanyak 27, maka seluruh derajat bebas habis untuk menduga pengaruh utama, dan rancangan ini merupakan kelompok rancangan jenuh (*saturated design*)

KLASIFIKASI RANCANGAN

Kegiatan klasifikasi rancangan merupakan suatu upaya untuk memberikan penilaian kepada sekelompok rancangan sehingga dapat diurutkan mana yang lebih menguntungkan untuk digunakan. Suatu klasifikasi dikerjakan menggunakan satu atau lebih kriteria tertentu.

Untuk rancangan faktorial pecahan regular dua kriteria klasik yang sangat populer adalah *maximum resolution* (Box dan Hunter, 1961) dan *minimum aberration* (Fries dan Hunter, 1980). Kriteria tersebut selanjutnya diperluas dengan munculnya *generalized resolution* (Tang dan Deng, 1999) dan *generalized minimum aberration*, (Xu dan Wu, 2001) yang selanjutnya disebut GMA.

GMA pada prinsipnya adalah meminimumkan kontaminasi pendugaan pengaruh ordo rendah dengan pengaruh ordo tinggi. Prinsip hirarki dalam analisis data mengasumsikan bahwa pengaruh ordo rendah merupakan pengaruh yang lebih penting untuk diduga. Untuk tujuan itu, GMA meminimumkan secara berurutan unsur pada vektor *generalized word length pattern* (GWL_P), $W = (A_3, A_4, \dots, A_m)$ dengan m adalah banyaknya faktor dan A_k diperoleh dengan formula

$$A_p = n^{-2} \sum_{k=1}^{n_p} \left| \sum_{i=1}^n x_{ik}^{(p)} \right|^2$$

dengan n adalah banyaknya run dan $x_{ik}^{(p)}$ diperoleh dengan cara berikut. Pertama setiap kolom yang terdiri s taraf diganti menjadi $(s - 1)$ kolom kontras ortogonal. Kemudian setiap kontras dinormalkan sehingga memiliki panjang akar kuadrat dari n . Selanjutnya lakukan perkalian p kolom kontras dari p faktor yang berbeda. Nilai dari perkalian p kolom itu adalah $x_{ik}^{(p)}$.

Karena A_k mengukur frekuensi pembauran antara r faktor dengan $(k - r)$ faktor, maka nilai A_3 dan A_4 umumnya adalah nilai yang paling utama dilihat. Nilai A_3 menggambarkan frekuensi pembauran antara pengaruh utama dengan pengaruh interaksi dua faktor. Sedangkan A_4 mengukur frekuensi antara pengaruh utama dan interaksi tiga faktor, serta antar pengaruh interaksi dua faktor.

Penulis sudah melakukan perhitungan dan dengan mudah dapat diperiksa bahwa nilai A_3 dan A_4 dari seluruh 68 OA(27, 3¹³) memiliki nilai yang sama yaitu masing-masing 104 dan 468. Dengan demikian, vektor (A_3, A_4) tidak dapat digunakan sebagai kriteria klasifikasi terhadap gugus OA ini.

Untuk itu selanjutnya yang akan digunakan adalah kriteria *projection aberration* yang diusulkan Xu, Cheng dan Wu (2004). Penjelasan dari kriteria tersebut adalah sebagai berikut dan untuk mempermudah akan diberikan untuk tiga faktor.

Pada saat menghitung nilai A_3 sebenarnya merupakan penjumlahan dari $\binom{m}{3}$ proyeksi rancangan tiga faktor. Artinya, seandainya setiap kombinasi tiga faktor dihitung nilai A_3 -nya, maka total dari $\binom{m}{3}$ nilai itu akan sama dengan nilai A_3 dari rancangan lengkap m faktor. Nilai A_3 dari proyeksi rancangan disebut juga sebagai *projected A_3 value*.

Pada kasus OA(27, 3¹³), setiap nilai A_3 merupakan penjumlahan dari $\binom{13}{3} = 286$ *projected A_3 value*. Tidak semua proyeksi memiliki nilai A_3 yang berbeda. Dari nilai-nilai tersebut kita bisa menghitung frekuensinya, yang disebut sebagai *projection frequency*. Kriteria *projection aberration* adalah kriteria yang meminimumkan nilai frekuensi tersebut secara berurutan yang dimulai dari nilai *projected A_3 value* paling besar. Nilai-nilai *projection frequency* untuk A_3 selanjutnya dilambangkan $A_3^{(3)}$.

Kriteria lain yang digunakan pada tulisan ini adalah $A_3^{(4)}$ yang merupakan frekuensi dari nilai A_3 jika OA(27, 3¹³) diproyeksikan ke dalam rancangan 4 faktor.

HASIL DAN DISKUSI

Banyaknya proyeksi rancangan tiga faktor dari setiap OA(27, 3¹³) adalah 286 proyeksi. Dari seluruh proyeksi, ada delapan kemungkinan nilai A_3 yang bisa diperoleh yaitu 0, 8/27, 4/9, 14/27, 2/3, 20/27, 10/9, dan 2. Proyeksi yang memiliki A_3 bernilai 0 adalah proyeksi yang berupa rancangan faktorial lengkap 3³ yang ketiganya saling ortogonal. Sedangkan proyeksi yang memiliki A_3 sama dengan 2 adalah rancangan faktorial pecahan regular 3³⁻¹ dengan tiga ulangan. Sementara yang memiliki nilai lainnya merupakan rancangan faktorial pecahan tiga faktor tiga taraf yang non-reguler dengan struktur alias yang parsial.

Karena ada 8 kemungkinan nilai A_3 dari proyeksi tiga faktor, maka vektor $A_3^{(3)}$ akan terdiri dari 8 unsur yang masing-masing unturnya adalah frekuensi dari setiap nilai. Total dari kedelapan unsur tersebut adalah 286, sejumlah banyaknya proyeksi yang dibuat.

Prinsip *sparsity* pada percobaan faktorial menyatakan bahwa dari sekian banyak faktor yang digunakan, hanya ada sebagian kecil faktor saja yang aktif (signifikan). Informasi mengenai $A_3^{(3)}$ ini diperlukan jika seandainya hanya ada 3 faktor saja yang aktif. Seandainya hanya ada tiga faktor yang aktif, maka analisis dilakukan dengan hanya melibatkan tiga faktor itu saja, yaitu dengan terlebih dahulu menghilangkan sepuluh faktor lain dari matriks rancangan. Kegiatan inilah yang dikenal sebagai proyeksi rancangan.

Perlu dipahami bahwa pada awal percobaan, peneliti tidak mengetahui faktor mana yang aktif. Tentu tidak diinginkan situasi dimana ketiga faktor yang aktif adalah tiga faktor yang proyeksinya memiliki A_3 sebesar 2. Karena jika ini yang terjadi, maka tidak semua pengaruh utama dan interaksi yang melibatkan tiga faktor aktif tadi dapat diduga. Jadi,

memilih rancangan dengan frekuensi proyeksi bernilai A_3 sebesar 2 sesedikit mungkin adalah pilihan yang lebih baik untuk menjamin semua pengaruh ketiga faktor dan interaksinya dapat diduga.

Kriteria projection aberration adalah kriteria yang meminimumkan frekuensi proyeksi dimulai dari nilai A_3 yang paling besar. Sehingga secara berurutan, meminimumkan nilai unsur vektor $A_3^{(3)}$ dari 2, 10/9, 20/27, 2/3, 14/27, 4/9, 8/27, dan 0. Dari 68 array, $A_3^{(3)}$ mengklasifikasikan menjadi 54 kelas. Tabel lengkap nilai $A_3^{(3)}$ disajikan pada Tabel 1.

Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa array dengan nomor 1 pada Lam dan Tonchev (1996) adalah satu-satunya rancangan faktorial pecahan reguler karena hanya memiliki nilai *projected* A_3 sebesar 0 dan 2. Artinya antar pengaruh utama dan interaksi dua faktor hanya bersifat saling ortogonal dan *fully-aliased*.

Berdasarkan kriteria $A_3^{(3)}$ array nomor 15 adalah array yang disebut *minimum projection aberration*. Pada array ini tidak satupun proyeksi tiga faktor yang menyebabkan pengaruh utama dan interaksi dua faktor beralias penuh. Sehingga jika ada tiga faktor yang aktif, maka apapun faktornya kondisi beralias penuh itu tidak terjadi. Kondisi yang sama juga terjadi pada array nomor 16.

Array nomor 15 lebih baik dibandingkan array nomor 16 karena nilai *projected* A_3 yang terbesar adalah 2/3 sedangkan pada array 16 sebesar 20/27. Besarnya nilai *projected* A_3 ini juga menggambarkan besarnya nilai korelasi antar pengaruh. Proyeksi dengan nilai A_3 yang besar memiliki nilai *D-efficiency* yang kecil dan memiliki galat baku dugaan yang lebih besar.

Untuk memudahkan peneliti percobaan, penulis cantumkan pada Lampiran, array nomor 15 dan 16 yang juga bisa ditemukan pada Lam dan Tonchev (1996). Susunan array ini harus diputar untuk menjadi 27 baris dan 13 kolom.

PENUTUP

Nilai A_3 dan A_4 dari vektor GWLP tidak dapat digunakan sebagai kriteria untuk memilih array terbaik pada kelas $OA(27, 3^{13})$ karena memiliki nilai yang sama untuk semua array. Penggunaan kriteria projection aberration dengan menghitung *projected* A_3 frequency atau $A_3^{(3)}$ mampu mengklasifikasikan 68 array menjadi 54 kelas.

Dengan mengasumsikan bahwa hanya tiga faktor yang aktif, maka array nomor 15 pada Lam dan Tonchev (1996) adalah pilihan yang terbaik karena tidak satupun proyeksi tiga faktor yang memiliki A_3 sebesar nol. Penggunaan kriteria $A_3^{(4)}$ juga dapat dilakukan jika mengasumsikan ada empat faktor yang aktif. Vektor $A_3^{(4)}$ berisi frekuensi nilai

A_3 dari proyeksi empat faktor. Meskipun tidak menyertakan hasil lengkapnya, penulis telah melakukan perhitungan dan nilai gabungan $A_3^{(3)}$ dan $A_3^{(4)}$ mampu membuat 65 kelas dari 68 array.

Tabel 1. Sebaran frekuensi nilai *projected* A_3 dari 68 OA (27, 3¹³)

array	$A_3^{(3)}$ (projected A_3 frequency)							
	2	10/9	20/27	2/3	14/27	4/9	8/27	0
15	0	0	0	52	0	156	0	78
18	0	0	52	0	52	0	130	52
14	3	0	0	63	0	108	27	85
57	3	7	0	50	24	80	30	92
61	3	14	0	37	28	80	26	98
65	3	14	8	29	36	56	46	94
25	3	21	0	28	0	126	0	108
60	3	21	8	16	12	94	34	98
64	3	21	16	10	18	68	56	94
62	3	21	25	0	28	45	73	91
27	7	0	0	81	54	0	27	117
63, 68	7	0	18	45	36	45	27	108
56	7	6	0	63	54	12	27	117
22, 38	7	9	0	60	0	90	0	120
17	7	9	0	72	0	72	0	126
51, 52, 54, 55	7	9	12	24	24	84	18	108
53	7	9	12	30	24	75	18	111
58	7	9	12	60	12	36	30	120
34, 36	7	12	0	51	36	42	18	120
45, 48, 49	7	12	12	27	24	72	18	114
42, 46, 47	7	15	12	18	24	78	18	114
59, 66	7	15	12	42	12	48	30	120
35	7	18	0	33	36	54	18	120
41	7	18	12	15	24	75	18	117
30	7	21	0	36	0	96	0	126
33, 44	7	21	12	24	12	60	30	120
37	7	24	0	27	0	102	0	126
39	7	24	0	33	0	93	0	129
21, 26	7	24	0	39	0	84	0	132
50	7	24	12	15	12	66	30	120
43	7	24	12	21	12	57	30	123
31	7	27	0	18	0	108	0	126
32	7	27	12	6	12	72	30	120
67	7	27	12	18	12	54	30	126
40	7	30	12	3	12	69	30	123
24	7	33	0	12	0	102	0	132
9	10	0	0	90	0	54	0	132
19	10	15	0	45	36	30	18	132
20	10	15	0	57	0	66	0	138
23	10	30	0	12	0	96	0	138
29	10	30	12	0	12	60	30	132
11	16	0	0	36	0	108	0	126
5	16	0	0	54	0	81	0	135
6	16	0	0	108	0	0	0	162
13	16	9	0	45	0	72	0	144
12	16	18	0	18	0	90	0	144
16	16	18	0	54	0	36	0	162
10	16	27	0	9	0	81	0	153
7	16	27	0	27	0	54	0	162
3, 8	16	36	0	0	0	72	0	162
2	25	0	0	81	0	0	0	180
4	25	27	0	0	0	54	0	180
1	52	0	0	0	0	0	0	234

DAFTAR PUSTAKA

Hedayat, AS., Sloane, NJA., dan Stufken J. 1999. *Orthogonal Array: Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York.

Lam C. dan Tonchev VD. 1996. Classification of Affine Resolvable 1-(27, 9, 4) Designs. *Journal of Statistical Planning and Inference* **56**: 187 – 202.

Lam C. dan Tonchev VD. 2000. Corrigendum to “Classification of Affine Resolvable 1-(27, 9, 4) Designs” [Journal of Statistical Planning and Inference 56 (1996) 187 – 202]. *Journal of Statistical Planning and Inference* **86**: 277 – 278.

Wu, CFJ. dan Hamada MS. 2000. *Experiments: Planning Analysis, and Parameter Design Optimization*. Wiley, New York.

Xu H., Cheng SW., dan Wu CFJ. 2004. Optimal Projective Three-Level Designs for Factor Screening and Interaction Detection. *Technometrics* **46**: 280 – 292.

Xu H. dan Wu CFJ. 2001. Generalized Minimum Aberration for Asymmetrical Fractional Factorial Designs. *The Annals of Statistics* **29**: 1066 – 1077.

LAMPIRAN

Array 15

111111112002022020200202021
 110022021111112020020220201
 110020222020021111112020021
 112002020220020220201111111
 201012021102201102201120021
 201212000211022011022011021
 201010220220112002110202111
 202100211102020211020220111
 200120210202111120202011201
 200122012011020202111102201
 200221101120200220110211021
 202001122011201120022002111
 202201102020112011201120201

Array 16

111111112002200220202020021
 112002021111110220200202201
 112002020220021111112020021
 112002022002202002021111111
 201010221102021120021120201
 201010220211202011200211021
 201010222020110202112002111
 200122011120200211020220111
 200122010202111102202011201
 200122012011022020111102021
 202201101100220022112211001
 202201100212101210021002121
 202201102021012101200120211

