

KAJIAN PENDUGA FUNGSI RAGAM PROSES POISSON PERIODIK MAJEMUK DENGAN TREN FUNGSI PANGKAT

A. Fajri S.¹, I W. Mangku², *H. Sumarno³

¹) Prodi Matematika, Jurusan Sain, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie,
Jalan Balaikota Nomor 1, Bacukiki, Parepare, Sulawesi Selatan, 91125
ahmadfajri@ith.ac.id

^{2,3}) Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam IPB,
Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680,
wayanma@apps.ipb.ac.id, hadisumarno@yahoo.com *corresponding author

Abstrak

Pada artikel ini dibahas tentang pendugaan fungsi ragam pada proses Poisson periodik majemuk yang mempertimbangkan kehadiran tren fungsi pangkat. Penulisan artikel ini bertujuan untuk mengonstruksi penduga, memeriksa kekonsistenan penduga, menganalisis bias, ragam dan *mean squared error (MSE)* asimtotik penduga, serta menentukan ukuran interval pengamatan proses terpendek sehingga nilai dugaan yang diperoleh sudah mendekati parameter yang diduga menggunakan simulasi komputer. Hasil kajian yang telah diperoleh berupa rumusan penduga fungsi ragam, syarat-syarat agar penduga yang dirumuskan kokonsisten, rumusan bias asimtotik, ragam asimtotik dan *MSE* asimtotik penduga. Berdasarkan hasil simulasi diperoleh bahwa penduga sudah mendekati nilai parameter yang diduga jika panjang interval waktu pengamatan adalah 5500.

Kata kunci: fungsi ragam, kekonsistenan, proses Poisson periodik majemuk, tren fungsi pangkat.

1 Pendahuluan

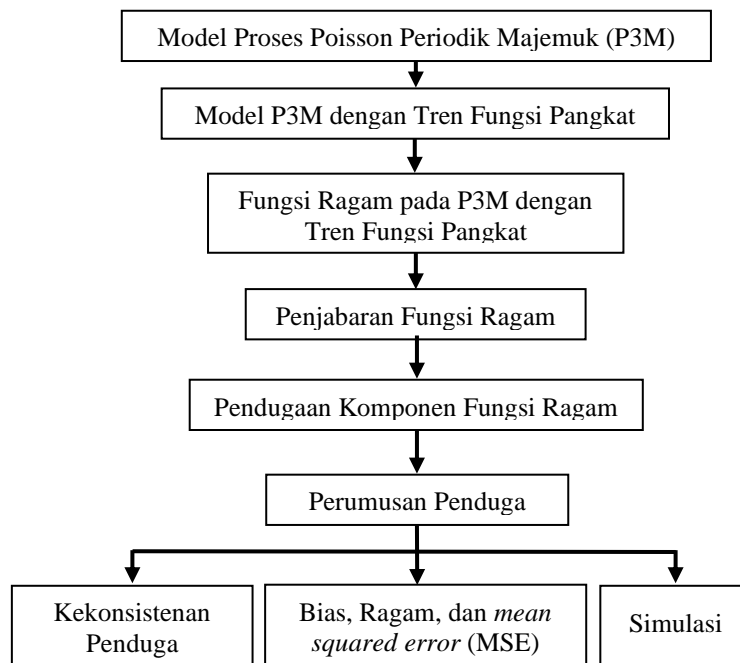
Salah satu proses stokastik yang bermanfaat dalam pemodelan berbagai fenomena nyata adalah proses Poisson majemuk. Beberapa aplikasinya di antaranya pada bidang fisika ([3]), keuangan dan asuransi ([2]), dan demografi ([6]). Pada artikel ini, kajian difokuskan pada proses Poisson nonhomogen majemuk, yaitu proses majemuk yang komponen proses Poissonnya memiliki fungsi intensitas tak konstan dari waktu.

Salah satu bentuk khusus dari proses Poisson nonhomogen majemuk adalah proses Poisson periodik (siklik) majemuk. Pada proses ini komponen Poissonnya memiliki intensitas fungsi periodik. Karena sebaran dari proses ini sulit diduga, maka kajian difokuskan pada pendugaan fungsi nilai harapan dan fungsi ragamnya. Pendugaan dua jenis fungsi ini pada proses Poisson periodik majemuk tanpa tren telah dikaji pada [7], [10], dan [15]. Kajian serupa untuk proses Poisson periodik majemuk yang mempertimbangkan kehadiran tren linear telah dikaji pada [1], [17], dan [18]. Selanjutnya kajian difokuskan pada proses Poisson periodik majemuk yang mempertimbangkan kehadiran tren berupa fungsi pangkat.

Pendugaan fungsi nilai harapan pada proses Poisson periodik majemuk dengan tren fungsi pangkat telah diteliti pada [16]. Dalam karya ilmiah ini pembahasan difokuskan pada pendugaan fungsi ragamnya, dengan tujuan sebagai berikut: (i) mengonstruksi penduga, (ii) mengkaji kekonsistenan penduga, (iii) menentukan bias, ragam, dan *mean squared error* (MSE) asimtotik penduga, dan (iv) menentukan ukuran interval pengamatan terpendek sehingga nilai dugaan sudah mendekati nilai parameter yang diduga.

2 Metode Penelitian

Alur penelitian yang dilakukan dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Alur penelitian

Langkah-langkah pelaksanaan penelitian ini dapat diringkas sebagai berikut.

- a. Merumuskan atau mengonstruksi penduga.
- b. Mengkaji kekonsistenan dari penduga yang dirumuskan.
- c. Menentukan bias, ragam, dan *mean squared error* (MSE) asimtotik penduga.
- d. Menentukan ukuran interval pengamatan terpendek sehingga nilai dugaan sudah mendekati nilai parameter yang diduga.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini disajikan hasil penelitian berdasarkan metode yang telah dijelaskan sebelumnya. Selanjutnya pada akhir bagian ini disajikan hasil simulasi penduga.

3.1 Perumusan Penduga

Misalkan $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah suatu proses Poisson yang fungsi intensitasnya terdiri atas dua komponen, yaitu komponen fungsi periodik λ_c dengan periode $\tau > 0$ (diketahui) dan komponen tren fungsi pangkat. Jadi, untuk setiap $s > 0$, fungsi intensitasnya dapat ditulis sebagai berikut

$$\lambda(s) = \lambda_c(s) + as^b, \quad (1)$$

dengan $\lambda_c(s)$ menyatakan fungsi periodik dengan periode τ dan $a > 0$. Pembahasan dibatasi hanya untuk nilai b diketahui dan $0 < b < 1$. Pada kajian ini tidak diperlukan asumsi bahwa fungsi intensitas λ_c memiliki bentuk parametrik, asumsi yang diperlukan hanya berupa fungsi periodik, yang memenuhi persamaan

$$\lambda_c(s) = \lambda_c(s + k\tau), \quad (2)$$

untuk setiap $s \geq 0$ dan $k \in \mathbb{N}$, dengan \mathbb{N} melambangkan himpunan bilangan asli.

Misalkan $\{Y(t), t \geq 0\}$ menyatakan suatu proses dengan

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (3)$$

di mana $\{X_i, i \geq 1\}$ adalah barisan peubah acak tak negatif yang saling bebas dan memiliki sebaran yang sama (i.i.d) dengan nilai harapan $\mu < \infty$ dan ragam $\sigma^2 < \infty$, yang juga bebas terhadap $\{N(t), t \geq 0\}$. Proses $\{Y(t), t \geq 0\}$ disebut proses Poisson periodik majemuk dengan tren fungsi pangkat. Model pada persamaan (3) merupakan pengembangan model yang dikaji pada [7], [10], dan [15]. Beberapa hasil pada pendugaan fungsi nilai harapan dari (3) dapat dilihat pada [16]. Beberapa hasil terkait lainnya dapat dilihat pada [4], [5], [8], [9], [11], [12], dan [13].

Misalkan $\mu_2 = E(X_1^2)$. Fungsi ragam dari $Y(t)$, dinotasikan dengan $V(t)$, dapat dituliskan menjadi

$$V(t) = E(N(t))E(X_1^2) = \Lambda(t)\mu_2, \quad (4)$$

dengan $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$.

Misalkan $t_r = t - \left\lfloor \frac{t}{\tau} \right\rfloor \tau$, di mana untuk setiap bilangan real x , $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x , dan misalkan pula $k_{t,\tau} = \left\lfloor \frac{t}{\tau} \right\rfloor$. Untuk setiap bilangan real positif t , t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$t = t_r + k_{t,\tau}\tau, \quad (5)$$

dengan $0 \leq t_r \leq \tau$. Misalkan $\Lambda_c(t) = \int_0^t \lambda_c(s)ds$ dan $\theta = \frac{1}{\tau}\Lambda_c(\tau)$, yaitu intensitas global komponen siklik pada proses $\{N(t), t \geq 0\}$. Diasumsikan bahwa $\theta > 0$. Selanjutnya untuk setiap $t \geq 0$, diperoleh

$$\Lambda(t) = k_{t,\tau}\tau\theta + \Lambda_c(t_r) + a \frac{t^{b+1}}{b+1}. \quad (6)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (4), didapatkan

$$V(t) = \left(k_{t,\tau}\tau\theta + \Lambda_c(t_r) + a \frac{t^{b+1}}{b+1} \right) \mu_2. \quad (7)$$

Misalkan $k_{n,\tau} = \left\lfloor \frac{n}{\tau} \right\rfloor$. Penduga bagi fungsi ragam $V(t)$ pada persamaan (7) dapat ditulis sebagai berikut

$$\hat{V}_{n,b}(t) = \left(k_{t,\tau}\tau\hat{\theta}_{n,b} + \hat{\Lambda}_{c,n,b}(t_r) + \hat{a}_{n,b} \frac{t^{b+1}}{b+1} \right) \hat{\mu}_{2,n}, \quad (8)$$

dengan

$$\hat{a}_{n,b} = \frac{(b+1) N([0,n])}{n^{b+1}}, \quad (9)$$

$$\hat{\theta}_{n,b} = \frac{1-b}{\tau^b n^{1-b}} \sum_{k=1}^{k_{n,\tau}} \frac{N([k\tau, (k+1)\tau])}{k^b} - \hat{a}_{n,b} (1-b)n^b, \quad (10)$$

$$\hat{\Lambda}_{c,n,b}(t_r) = \frac{(1-b)\tau^{1-b}}{n^{1-b}} \sum_{k=1}^{k_{n,\tau}} \frac{N([k\tau, k\tau+t_r])}{k^b} - \hat{a}_{n,b} (1-b)n^b t_r, \quad (11)$$

dan

$$\hat{\mu}_{2,n} = \frac{1}{N([0,n])} \sum_{i=1}^{N([0,n])} X_i^2, \quad (12)$$

dengan pengertian bahwa $\hat{\mu}_{2,n} = 0$ ketika $N([0,n]) = 0$. Jadi, $\hat{V}_{n,b}(t) = 0$ ketika $N([0,n]) = 0$.

3.2 Kekonsistenan, Bias, Ragam, dan MSE Penduga

Kekonsistenan lemah

Jika λ memenuhi persamaan (1) dan $Y(t)$ memenuhi persamaan (3), maka

$$\hat{V}_{n,b}(t) \xrightarrow{p} V(t), \quad (13)$$

untuk $n \rightarrow \infty$. Jadi $\hat{V}_{n,b}(t)$ merupakan penduga konsisten lemah bagi $V(t)$.

Pendekatan asimtotik untuk bias

Jika λ memenuhi persamaan (1) dan $Y(t)$ memenuhi persamaan (3), maka

$$E \left(\hat{V}_{n,b}(t) \right) = V(t) + \frac{\ln(n/\tau)}{n^{1-b}} \left(\frac{ab\mu_2(1-b)(t\tau+t_r^2)}{2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{1-b}} \right), \quad (14)$$

dan

$$Bias \left(\hat{V}_{n,b}(t) \right) = \frac{\ln(n/\tau)}{n^{1-b}} \left(\frac{ab\mu_2(1-b)(t\tau+t_r^2)}{2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{1-b}} \right), \quad (15)$$

untuk $n \rightarrow \infty$.

Pendekatan asimtotik untuk ragam

Jika λ memenuhi persamaan (1) dan $Y(t)$ memenuhi persamaan (3), maka

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{V}_{n,b}(t)) = & \frac{\ln(n/\tau)}{n^{1-b}} \left(ab\mu_2^2(1-b) \left((t^2\theta\tau + \Lambda_c(t_r)t_r^2 + t\theta t_r^2) + \right. \right. \\ & t\Lambda_c(t_r)\tau + \frac{t^{b+1}}{b+1}(t + at_r^2) - \frac{V(t)(t\tau + t_r^2)}{\mu_2} - \\ & \left. \left. \frac{\ln(n/\tau)}{n^{1-b}} \left(\frac{ab(1-b)(t\tau + t_r^2)^2}{4} \right) \right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1-b}}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

untuk $n \rightarrow \infty$.

Pendekatan asimtotik untuk *mean squared error* (MSE)

Jika λ memenuhi persamaan (1) dan $Y(t)$ memenuhi persamaan (3), maka

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{V}_{n,b}(t)) = & \frac{\ln(n/\tau)}{n^{1-b}} \left(ab\mu_2^2(1-b) \left((t^2\theta\tau + \Lambda_c(t_r)t_r^2 + t\theta t_r^2) + t\Lambda_c(t_r)\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{t^{b+1}}{b+1}(t + at_r^2) - \frac{V(t)(t\tau + t_r^2)}{\mu_2} \right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1-b}}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

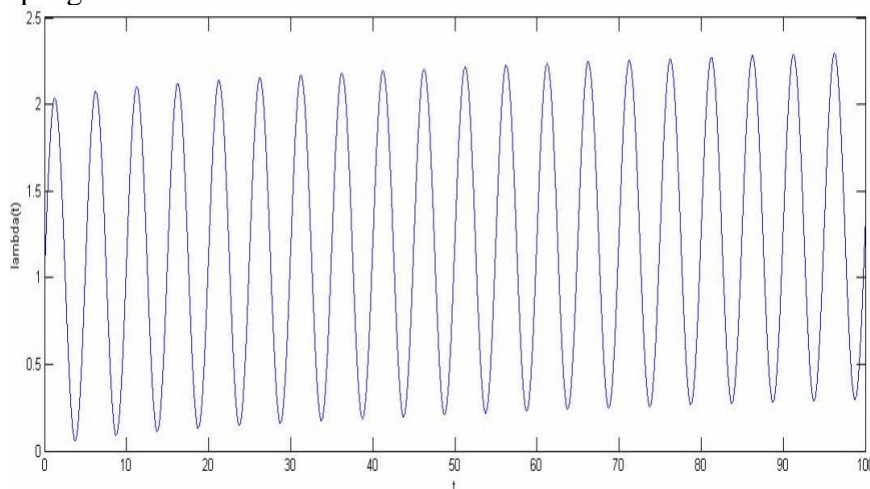
untuk $n \rightarrow \infty$.

3.3 Simulasi Penyusunan Penduga dengan Data Bangkitan

Simulasi ditujukan untuk mengamati perilaku penduga untuk kasus panjang interval pengamatan yang terbatas. Dalam simulasi ini, realisasi dibangkitkan dari proses Poisson periodik dengan tren fungsi pangkat untuk panjang interval $[0, t] = [0, 22]$. Dengan rumusan fungsi intensitas pada persamaan (1) dapat diambil contoh fungsi intensitas sebagai berikut

$$\lambda(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + 1 + 0.03t^{1/2}. \quad (18)$$

Grafik fungsi intensitas pada persamaan (18) disajikan pada Gambar 2 berikut untuk panjang interval $[0, t] = [0, 100]$ untuk melihat kenaikan grafik fungsi intensitas dengan tren fungsi pangkat.

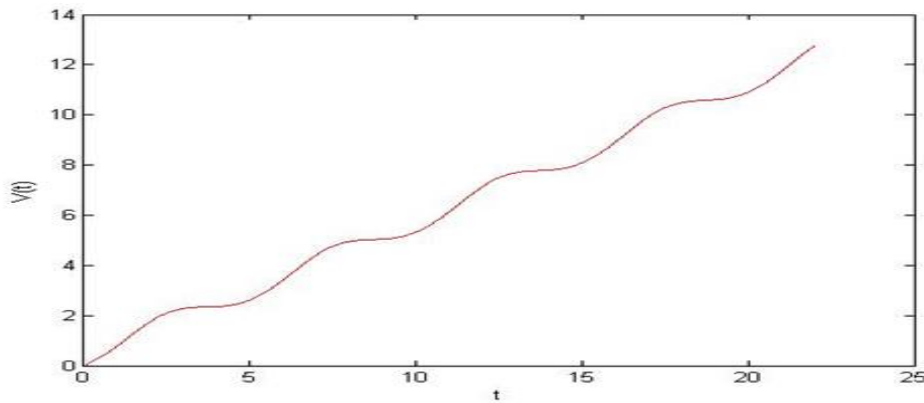


Gambar 2. Fungsi intensitas $\lambda(t)$

Selanjutnya untuk penduga μ_2 , dibangkitkan peubah acak X sebanyak realisasi peubah acak $N([0,100])$ yang didapatkan dengan sebaran eksponensial dengan parameter $\mu = 2$, sehingga didapatkan $E(X) = \mu_1 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ dan $E(X^2) = \mu_2 = \frac{2}{\mu^2} = \frac{1}{2}$. Oleh karena itu, dengan menggunakan persamaan (7) didapatkan fungsi ragam sebagai berikut

$$V(t) = \frac{1.25}{\pi} - \frac{1.25}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{5} - 2\pi \left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor\right) + 0.5t + 0.01t^{\frac{3}{2}}. \tag{19}$$

Grafik fungsi ragam pada persamaan (19) disajikan pada Gambar 3. Fungsi ragam pada persamaan (19) inilah yang diduga.



Gambar 3. Fungsi ragam $V(t)$

Pembangkitan realisasi proses dengan fungsi intensitas pada persamaan (18) dilakukan dengan menggunakan teknik *thinning process* ([14]) pada *nonhomogeneous Poisson process* (NHPP) untuk mendapatkan titik-titik data pada *counting process*. Setelah realisasi ini didapatkan, selanjutnya dihitung penduga untuk $a, \theta, \Lambda_c(t_r)$ dan μ_2 dengan rumusan pada persamaan (9), (10), (11), dan (12) untuk panjang interval waktu pengamatan terbatas. Dengan menggunakan rumusan penduga pada persamaan (8), didapatkan fungsi penduga ragam $V(t)$. Panjang interval pengamatan yang dipilih yaitu $n = 1100, 3300, 5500, 7700$ dan 9900 dengan pengulangan sebanyak 10 kali. Selanjutnya, dicari nilai dari $Bias(\hat{V}_{n,b}(t)), Var(\hat{V}_{n,b}(t))$, dan $MSE(\hat{V}_{n,b}(t))$. Rata-rata banyak kejadian dan perubahan nilai rata-rata penduga untuk a, θ , dan μ_2 disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Rata-rata kejadian, $\hat{a}_{n,b}, \hat{\theta}_{n,b}$ dan $\hat{\mu}_{2,n}$

n	Rata-rata kejadian	Rata-rata $\hat{a}_{n,b}$	Rata-rata $\hat{\theta}_{n,b}$	Rata-rata $\hat{\mu}_{2,n}$
1100	1817.3	0.02949	0.94026	0.47553
3300	7077.8	0.02990	0.96375	0.48714
5500	13683.3	0.03010	0.96994	0.49122
7700	21231.4	0.03003	0.97525	0.49491
9900	29599.6	0.02998	0.97885	0.49519
	Nilai asli	0.03	1	0.5

Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa hasil simulasi sudah mendekati nilai asli. Rata-rata $\hat{a}_{n,b}$ dan $\hat{\theta}_{n,b}$ menunjukkan bahwa penduga menuju ke nilai a dan θ yaitu 0.03 dan 1 untuk beberapa nilai n yang diberikan. Rata-rata $\hat{\mu}_{2,n}$ menunjukkan nilai penduga dekat dengan nilai μ_2 yaitu 0.5.

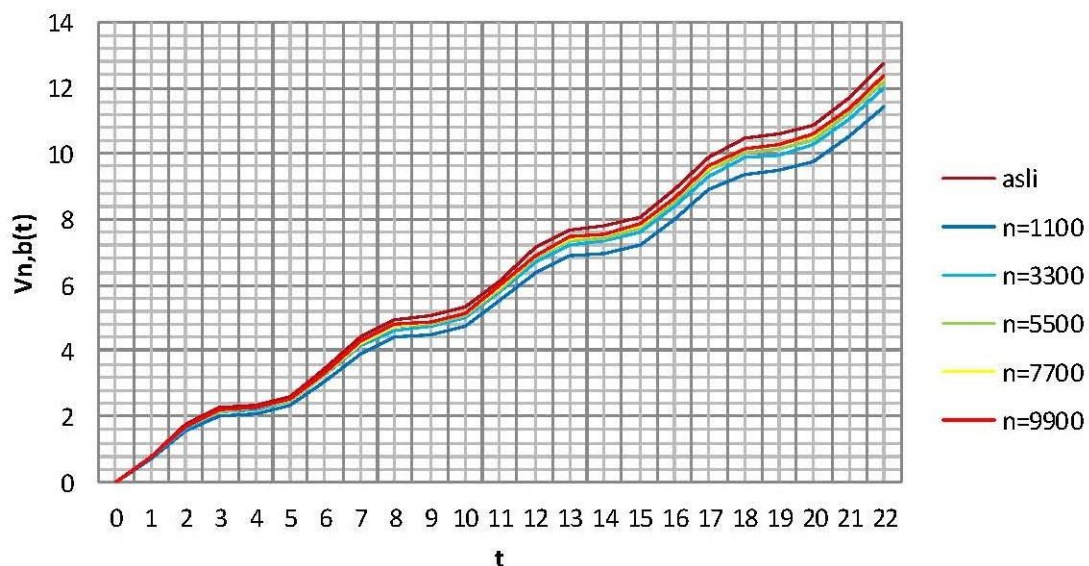
Penduga untuk $\Lambda_c(t_r)$ bergantung pada nilai t_r , di mana $t_r = t - \lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor \tau$ sehingga didapatkan nilai perubahan rata-rata $\hat{\Lambda}_{c,n,b}(t_r)$ pada Tabel 2.

Tabel 2. Perubahan rata-rata $\hat{\Lambda}_{c,n,b}(t_r)$ untuk interval [0,22]

t	$\Lambda_c(t_r)$ asli	$n=1100$	$n=3300$	$n=5500$	$n=7700$	$n=9900$
0,5,10,15,20	0	0	0	0	0	0
1,6,11,16,21	1.54987	1.44596	1.51157	1.52060	1.52807	1.53791
2,7,12,17,22	3.43957	3.20703	3.30897	3.33371	3.35256	3.36987
3,8,13,18	4.43957	4.15901	4.27479	4.30419	4.32500	4.34510
4,9,14,19	4.54987	4.25629	4.37456	4.40339	4.42646	4.45004

Pada Tabel 2 dapat dilihat bahwa hasil simulasi sudah mendekati nilai asli. Rata-rata $\hat{\Lambda}_{c,n,b}(t_r)$ menunjukkan bahwa penduga menuju ke nilai $\Lambda_c(t_r)$ untuk beberapa nilai n yang diberikan.

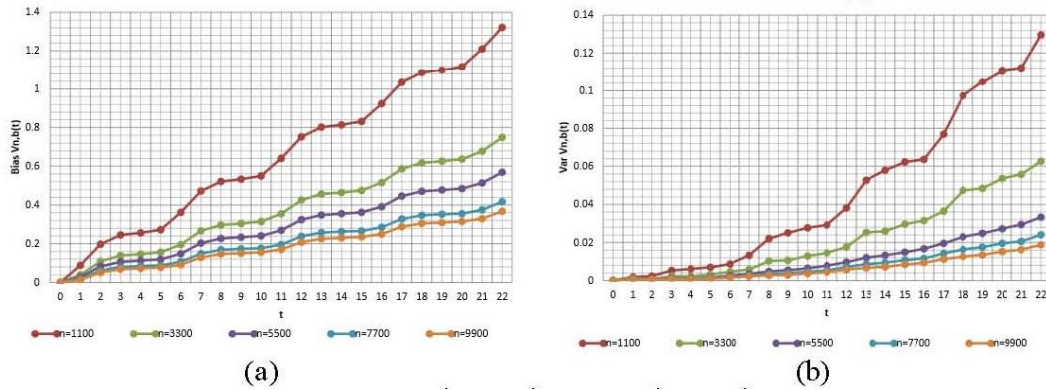
Penduga $V(t)$ merupakan penduga yang berupa fungsi yang bergantung pada nilai t sehingga didapatkan perubahan nilai rata-rata $\hat{V}_{n,b}(t)$ pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. Perubahan nilai rata-rata $\hat{V}_{n,b}(t)$ untuk interval [0,22]

Gambar 4 menunjukkan bahwa semakin bertambahnya nilai n , nilai rata-rata $\hat{V}_{n,b}(t)$ hasil simulasi penduga semakin mendekati nilai $V(t)$.

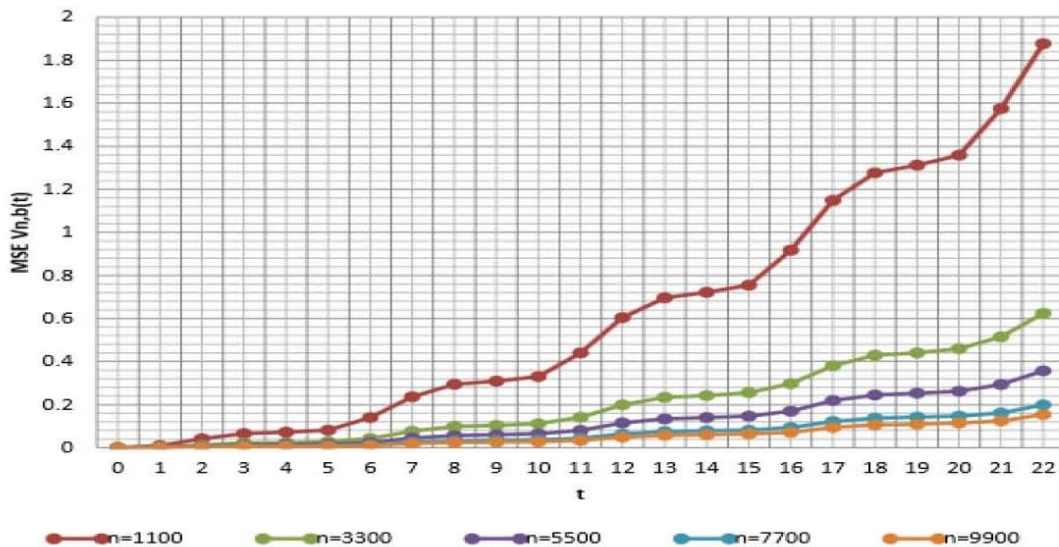
Bias dan ragam penduga bagi $V(t)$ merupakan penduga yang berupa fungsi yang bergantung pada nilai t . Perubahan nilai $Bias(\hat{V}_{n,b}(t))$ dan $Var(\hat{V}_{n,b}(t))$ disajikan pada Gambar 5a dan Gambar 5b.



Gambar 5. Perubahan nilai $Bias(\hat{V}_{n,b}(t))$ dan $Var(\hat{V}_{n,b}(t))$ untuk interval $[0,22]$

Gambar 5a dan 5b menunjukkan bahwa semakin bertambahnya nilai n , nilai $Bias(\hat{V}_{n,b}(t))$ dan $Var(\hat{V}_{n,b}(t))$ simulasi penduga semakin menuju ke 0. Dalam kasus ini, nilai $Bias(\hat{V}_{n,b}(t))$ dan $Var(\hat{V}_{n,b}(t))$ sudah cukup kecil ketika $n = 5500$.

Perhitungan *mean squared error* (MSE) penduga bagi $V(t)$ merupakan penduga yang berupa fungsi yang bergantung pada nilai t . Perubahan nilai $MSE(\hat{V}_{n,b}(t))$ disajikan pada Gambar 6.



Gambar 6. Perubahan nilai $MSE(\hat{V}_{n,b}(t))$ untuk interval $[0,22]$

Gambar 6 menunjukkan bahwa semakin bertambahnya nilai n , nilai $MSE(\hat{V}_{n,b}(t))$ simulasi penduga semakin menuju ke 0. Dalam kasus ini, nilai $MSE(\hat{V}_{n,b}(t))$ sudah cukup kecil ketika $n = 5500$.

4 Simpulan

Rumusan penduga fungsi ragam pada proses Poisson periodik dengan tren fungsi pangkat adalah

$$\hat{V}_{n,b}(t) = \left(k_{t,\tau} \tau \hat{\theta}_{n,b} + \hat{\Lambda}_{c,n,b}(t_r) + \hat{a}_{n,b} \frac{t^{b+1}}{b+1} \right) \hat{\mu}_{2,n},$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n,b} &= \frac{(b+1) N([0, n])}{n^{b+1}}, \\ \hat{\theta}_{n,b} &= \frac{1-b}{\tau^b n^{1-b}} \sum_{k=1}^{k_{n,\tau}} \frac{N([k\tau, (k+1)\tau])}{k^b} - \hat{a}_{n,b} (1-b)n^b \\ \hat{\Lambda}_{c,n,b}(t_r) &= \frac{(1-b)\tau^{1-b}}{n^{1-b}} \sum_{k=1}^{k_{n,\tau}} \frac{N([k\tau, k\tau+t_r])}{k^b} - \hat{a}_{n,b} (1-b)n^b t_r, \end{aligned}$$

dan

$$\hat{\mu}_{2,n} = \frac{1}{N([0, n])} \sum_{i=1}^{N([0, n])} X_i^2,$$

dengan $\hat{V}_{n,b}(t) = 0$, saat $N([0, n]) = 0$. Penduga fungsi ragam dengan rumusan ini merupakan penduga konsisten lemah.

Pendekatan asimtotik untuk bias, ragam dan MSE penduga berturut-turut adalah

$$\begin{aligned} Bias(\hat{V}_{n,b}(t)) &= \frac{\ln(n/\tau)}{n^{1-b}} \left(\frac{ab\mu_2(1-b)(t\tau+t_r^2)}{2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1-b}}\right), \\ Var(\hat{V}_{n,b}(t)) &= \frac{\ln(n/\tau)}{n^{1-b}} \left(ab\mu_2^2(1-b) \left((t^2\theta\tau + \Lambda_c(t_r)t_r^2 + t\theta t_r^2) + t\Lambda_c(t_r)\tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{t^{b+1}}{b+1}(t + at_r^2) - \frac{V(t)(t\tau+t_r^2)}{\mu_2} - \frac{\ln(n/\tau)}{n^{1-b}} \left(\frac{ab(1-b)(t\tau+t_r^2)^2}{4} \right) \right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1-b}}\right), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} MSE(\hat{V}_{n,b}(t)) &= \frac{\ln(n/\tau)}{n^{1-b}} \left(ab\mu_2^2(1-b) \left((t^2\theta\tau + \Lambda_c(t_r)t_r^2 + t\theta t_r^2) + t\Lambda_c(t_r)\tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{t^{b+1}}{b+1}(t + at_r^2) - \frac{V(t)(t\tau+t_r^2)}{\mu_2} \right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1-b}}\right), \end{aligned}$$

untuk $n \rightarrow \infty$.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa penduga sudah cukup mendekati nilai parameter yang diduga jika panjang interval waktu pengamatan yang digunakan $n = 5500$. Dengan menggunakan $n = 5500$, nilai $Bias(\hat{V}_{n,b}(t))$, $Var(\hat{V}_{n,b}(t))$, dan $MSE(\hat{V}_{n,b}(t))$ sudah cukup kecil.

Daftar Pustaka

- [1] Abdullah S, Mangku IW, Siswadi. 2017. Estimation of the variance function of a compound cyclic Poisson process in the presence of linear trend. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 102(3):559-572.
- [2] Bening VE, Korolev VY. 2002. *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance*. Boston (US): VSP International Science Publishers.
- [3] Byrne J. 1969. Properties of compound Poisson processes with applications in statistical physics. *Physica*. 41:575-587.
- [4] Erliana W, Mangku IW, Sumarno H. 2014. Estimating the intensity obtained as the product of a periodic function with the power function trend of a non-homogeneous Poisson process. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 90(2): 163-172.
- [5] Helmers R, Mangku IW. 2012. Predicting a cyclic Poisson process. *Annals Inst. of Statistical Mathematics*, 64: 1261-1279.
- [6] Kegler SR. 2007. Applying the compound Poisson process model to the reporting of injury-related mortality rates. *Epidemiologic Perspectives & Innovations*. 4:1-9.
- [7] Makhmudah FI, Mangku IW, Sumarno H. 2016. Estimating the variance function of a compound cyclic Poisson process. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 100(6):911-922.
- [8] Mangku IW. 2011. Estimating the intensity obtained as the product of a periodic function with the linear trend of a non-homogeneous Poisson process. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 51(2): 141-150.
- [9] Mangku IW, Budiarti R, Taslim, Casman. 2013. Estimating the intensity obtained as the product of a periodic function with the quadratic trend of a non-homogeneous Poisson process. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 82(1): 33-44.
- [10] Mangku IW, Ruhayat, Purnaba IGP. 2013. Statistical properties of an estimator for the mean function of a compound cyclic Poisson process. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 82(2):227-237.
- [11] Mangku IW, Sakinah F, Ruhayat. 2016. Estimating the mean and variance function of a compound Poisson process having power function intensity. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 100(9): 1455-1465.
- [12] Maulidi I, Mangku IW, Sumarno H. 2015. Strong consistency of a kernel-type estimator for the intensity obtained as the product of a periodic function with the power function trend of a non-homogeneous Poisson process. *British Journal of Applied Science and Technology*, 9(4): 383-387.
- [13] Prasetya IMYE, Mangku IW, Sumarno H. 2017. Estimating the mean and variance of a compound Poisson process with the Poisson intensity obtained as exponential of the linear function. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 102(4): 721-729.
- [14] Ross, SM. 2012. *Simulation*. Amsterdam (NL): Academic Press.

- [15]Ruhayat, Mangku IW, Purnaba IGP. 2013. Consistent estimation of the mean function of a compound cyclic Poisson process. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 77(2):183-194.
- [16]Sari IF, Mangku IW, Sumarno H. 2016. Estimating the mean function of a compound cyclic Poisson process in the presence of power function trend. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 100(11):1825-1840.
- [17]Wibowo BA, Mangku IW, Siswadi. 2014. Consistent estimation of the mean function of a compound cyclic Poisson process in the presence of linear trend. *IndoMS Journal on Statistics*. 2(2):1-10.
- [18]Wibowo BA, Mangku IW, Siswadi. 2017. Statistical properties of an estimator for the mean function of a compound cyclic Poisson process in the presence of linear trend. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 23(2), 173-185.