PEMODELAN NILAI TUKAR RUPIAH TERHADAP DOLLAR AMERIKA MENGGUNAKAN DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV EMPAT WAKTU SEBELUMNYA

CRENATA,A. K.[1], B. SETIAWATY[2], DAN N. K. K. ARDANA[2]

[1]Mahasiswa Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

[2]Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

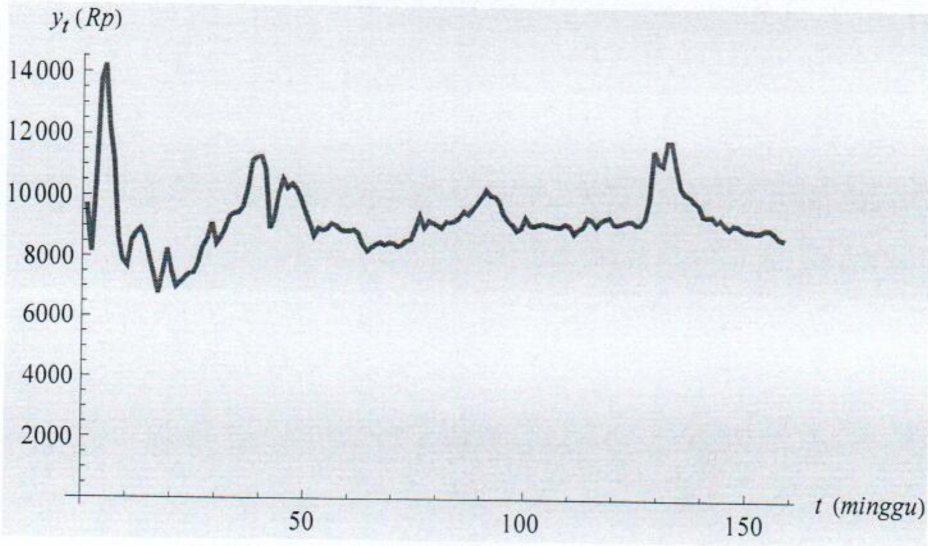
Abstrak : Perilaku nilai tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika dari tahun 1998 sampai dengan 2011 dicoba dimodelkan dengan menggunakan deret waktu *Hidden* Markov empat waktu sebelumnya. Pendugaan parameter model dilakukan menggunakan Metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulang menggunakan metode *Expectation Maximization.* Hasil yang diperoleh ternyata tidak lebih baik daripada hasil jika menggunakan deret waktu Hidden Markov tiga waktu sebelumnya. Hal ini mungkin disebabkan oleh kompleksitas perhitungan numerik.

Kata kunci: Rantai Markov, *Hidden* Markov, Deret waktu *Hidden* Markov, Metode *Expectation Maximization.*

1. PENDAHULUAN

Untuk menggambarkan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika (Gambar 1) Setiawaty et. al. (2011) telah menggunakan model deret waktu *hidden* Markov tiga waktu sebelumnya. Pada model ini diasumsikan bahwa nilai tukar Rupiah saat ini dipengaruhi oleh proses penyebab dan nilai tukar saat ini sampai tiga waktu sebelumnya. Hasil yang diperoleh cukup baik dan sudah menggambarkan perilaku nilai tukar Rupiah secara umum, galat yang diperoleh relatif cukup kecil, tetapi galat maksimum masih cukup besar.

Artikel ini mencoba memodelkan perilaku nilai tukar Rupiah tersebut dengan model deret waktu yang lebih kompleks, yaitu deret waktu Hidden Markon empat waktu sebelumnya, dengan harapan keakuratan model meningkat.



Gambar 1. Rata-rata nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika Tahun 1998 s/d 2011 Sumber Data: www.bankofcanada.ca. (Mei 2011)

2. MODEL DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV EMPAT WAKTU SEBELUMNYA

Pada bagian ini akan dimodelkan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika dalam kurun waktu dari Februari 1998 sampai dengan April 2011 menggunakan deret waktu *Hidden* Markov empat waktu sebelumnya.

Faktor-faktor yang menyebabkan terjadinya perubahan nilai tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika diasumsikan sebagai *state* dari suatu rantai Markov $\{S_t\}$ yang tidak diamati. Misalkan banyaknya faktor tersebut adalah N. Dalam tulisan ini diambil $N = 2$. Pada setiap *state*, data nilai tukar Rupiah dibangkitkan oleh peubah acak Y_t yang menyebar dengan sebaran tertentu pada ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dalam hal ini proses $\{S_t\}$ tersembunyi (*hidden*) di balik proses yang diamati, yaitu $\{Y_t\}$. Sehingga pasangan proses stokastik $\{(S_t, Y_t)\}$ merupakan model *hidden* Markov.

Pada tulisan ini digunakan model *hidden* Markov yang merupakan deret waktu yang mempertimbangkan empat waktu sebelumnya dan berbentuk:

$$Y_t - \mu_{s_t^\bullet} = \phi_1\left(Y_{t-1} - \mu_{s_{t-1}^\bullet}\right) + \phi_2\left(Y_{t-2} - \mu_{s_{t-2}^\bullet}\right) + \phi_3\left(Y_{t-3} - \mu_{s_{t-3}^\bullet}\right) + \phi_4\left(Y_{t-4} - \mu_{s_{t-4}^\bullet}\right) + \varepsilon_t$$

di mana:

- $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan peubah acak yang saling bebas dan menyebar normal $N(0, \sigma^2)$.
- $\{Y_t\}$ adalah proses yang diamati dan bernilai skalar.

- $\{S_t^*\}$ adalah rantai Markov dengan ruang *state* $S^* = \{1,2\}$ dan $P^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}$ merupakan matriks peluang transisinya, dengan $p_{ji}^* = P(S_t^* = j \mid S_{t-1}^* = i)$
- $\mu(S_t^*) = \langle \mu, S_t^* \rangle = \mu_{S_t^*}$, dengan $\langle .,. \rangle$ menyatakan hasil kali dalam di R^2.
- $\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ dan ϕ_4 adalah konstanta real.

Perhatikan bahwa model ini dicirikan oleh parameter $\theta = \left(\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \sigma^2\right)$. Dengan menggunakan metode *Expectation Maximization* (metode EM) akan diduga parameter $\theta = \left(\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \sigma^2\right)$ dari data *Y*.

Dalam kasus ini Y_t tidak hanya bergantung pada S_t^* tetapi juga bergantung pada S_{t-1}^*, S_{t-2}^*, S_{t-3}^* dan S_{t-3}^* sehingga agar tetap memenuhi sifat Markov perlu didefinisikan proses baru $\{S_t\}$ dengan *state*nya sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
&S_t = 1, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 2, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 3, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 4, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 5, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 6, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 7, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 8, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 9, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 10, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 11, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 12, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 13, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 14, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 15, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 16, \text{ jika } S_t^* = 1, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 17, \text{ jika } S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 18, \text{ jika } S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 19, \text{ jika } S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 20, \text{ jika } S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 21, \text{ jika } S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 22, \text{ jika } S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 23, \text{ jika } S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1 \\
&S_t = 24, \text{ jika } S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 1, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 2, \text{ dan } S_{t-4}^* = 2 \\
&S_t = 25, \text{ jika } S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 1, \text{ dan } S_{t-4}^* = 1
\end{aligned}
$$

$S_t = 26$, jika $S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 1$, dan $S_{t-4}^* = 2$
$S_t = 27$, jika $S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 2$, dan $S_{t-4}^* = 1$
$S_t = 28$, jika $S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 1, S_{t-3}^* = 2$, dan $S_{t-4}^* = 2$
$S_t = 29$, jika $S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 1$, dan $S_{t-4}^* = 1$
$S_t = 30$, jika $S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 1$, dan $S_{t-4}^* = 2$
$S_t = 31$, jika $S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 2$, dan $S_{t-4}^* = 1$
$S_t = 32$, jika $S_t^* = 2, S_{t-1}^* = 2, S_{t-2}^* = 2, S_{t-3}^* = 2$, dan $S_{t-4}^* = 2$

Lemma 1: $\{S_t\}$ merupakan rantai Markov dengan ruang *state* $S = \{1, 2, ..., 32\}$ dan matriks peluang transisi P sebagai berikut.

$$P = \begin{pmatrix}
p^*_{11} & p^*_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & p^*_{11} & p^*_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{11} & p^*_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{11} & p^*_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{11} & p^*_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{11} & p^*_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{11} & p^*_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{11} & p^*_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{12} & p^*_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{12} & p^*_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{12} & p^*_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{12} & p^*_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{12} & p^*_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{12} & p^*_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{12} & p^*_{12} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{12} & p^*_{12} \\
p^*_{21} & p^*_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & p^*_{21} & p^*_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{21} & p^*_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{21} & p^*_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{21} & p^*_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{21} & p^*_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{21} & p^*_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{21} & p^*_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{22} & p^*_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{22} & p^*_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{22} & p^*_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{22} & p^*_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{22} & p^*_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{22} & p^*_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{22} & p^*_{22} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^*_{22} & p^*_{22}
\end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa pasangan proses $\{(S_t, Y_t)\}$ merupakan model *hidden* Markov dengan parameter $\theta = \left(\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \sigma^2\right)$.

3. PENDUGAAN PARAMETER

Penduga $\hat{\theta}$ diperoleh dengan memaksimumkan fungsi log *likelihood*

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \log f\left(y_t \middle| \mathcal{Y}_{t-1}; \theta\right)$$

di mana $\mathcal{Y}_t$ adalah medan-σ yang lengkap dan dibangun oleh $Y_1, Y_2, Y_3 \cdots, Y_t$. Karena $\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ bebas stokastik identik maka diperoleh fungsi sebaran bagi ε_t sebagai berikut .

$$F_{\varepsilon_t}(y_t) = P(\varepsilon_t \le y_t) = \int_0^{y_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{\frac{-(\varepsilon_t - 0)^2}{2\sigma^2}\right\} d\varepsilon_t = \int_0^{y_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{\frac{-(\varepsilon_t)^2}{2\sigma^2}\right\} d\varepsilon_t .$$

Berdasarkan persamaan di atas diperoleh fungsi sebaran bagi Y_t

$F_{Y_t}(y_t) = P(Y_t \le y_t)$

$$= P\left(\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_{s^*_{t-1}}\right)+\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_{s^*_{t-2}}\right)+\phi_3\left(Y_{t-3}-\mu_{s^*_{t-3}}\right)+\phi_4\left(Y_{t-4}-\mu_{s^*_{t-4}}\right)+\mu_{s^*_t}+\varepsilon_t \le y_t\right)$$

$$= P\left(\varepsilon_t \le \left(y_t-\mu_{s^*_t}\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_{s^*_{t-1}}\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_{s^*_{t-2}}\right)-\phi_3\left(Y_{t-3}-\mu_{s^*_{t-3}}\right)-\phi_4\left(Y_{t-4}-\mu_{s^*_{t-4}}\right)\right)$$

Misalkan

$$v=\left(y_t-\mu_{s^*_t}\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_{s^*_{t-1}}\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_{s^*_{t-2}}\right)-\phi_3\left(Y_{t-3}-\mu_{s^*_{t-3}}\right)-\phi_4\left(Y_{t-4}-\mu_{s^*_{t-4}}\right)$$

maka

$$F_{Y_t}(y_t)=\int_0^v \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}\right\}d\varepsilon_t$$

dan

$$f_{Y_t}(y_t)=\frac{\partial}{\partial y_t}F_{Y_t}(y_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{\frac{-v^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{\partial v}{\partial y_t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{\frac{-\left(\left(y_t-\mu_{s^*_t}\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_{s^*_{t-1}}\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_{s^*_{t-2}}\right)-\phi_3\left(Y_{t-3}-\mu_{s^*_{t-3}}\right)-\phi_4\left(Y_{t-4}-\mu_{s^*_{t-4}}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Karena $\{S_t\}$ merupakan rantai Markov yang terdiri dari 32 *state* maka terdapat 32 fungsi kepekatan peluang bagi Y_t. Kumpulan fungsi kepekatan peluang tersebut dilambangkan oleh vektor (32×1) η_t, sehingga diperoleh

$$\eta_t=\begin{pmatrix} f(y_t \mid S_t=1,Y_{t-1};\theta) \\ f(y_t \mid S_t=2,Y_{t-1};\theta) \\ \vdots \\ f(y_t \mid S_t=32,Y_{t-1};\theta)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{\frac{-\left((y_t-\mu_1)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_1)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_1)-\phi_3(Y_{t-3}-\mu_1)-\phi_4(Y_{t-4}-\mu_1)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{\frac{-\left((y_t-\mu_1)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_1)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_1)-\phi_3(Y_{t-3}-\mu_1)-\phi_4(Y_{t-4}-\mu_2)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{\frac{-\left((y_t-\mu_2)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_2)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_2)-\phi_3(Y_{t-3}-\mu_2)-\phi_4(Y_{t-4}-\mu_2)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\end{pmatrix}.$$

Misalkan $\hat{\xi}_{t|t-1}$ melambangkan vektor (32×1) di mana elemen ke-j pada vektor merepresentasikan $P(S_t=j \mid Y_{t-1};\theta)$ dan $\otimes$ melambangkan perkalian elemen per elemen dua vektor, maka

$$\hat{\xi}_{t|t-1}\otimes\eta_t=\begin{pmatrix} P(S_t=1 \mid Y_{t-1};\theta) \\ P(S_t=2 \mid Y_{t-1};\theta) \\ \vdots \\ P(S_t=32 \mid Y_{t-1};\theta)\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} f(y_t \mid S_t=1,Y_{t-1};\theta) \\ f(y_t \mid S_t=2,Y_{t-1};\theta) \\ \vdots \\ f(y_t \mid S_t=32,Y_{t-1};\theta)\end{pmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan di atas, dapat dituliskan:

$$P(S_t = j \mid Y_{t-1};\theta) f(y_t \mid S_t = j, Y_{t-1};\theta) = \frac{P(S_t = j, Y_{t-1};\theta) P(y_t, S_t = j, Y_{t-1};\theta)}{P(Y_{t-1};\theta) P(S_t = j, Y_{t-1};\theta)}$$
$$= \frac{P(y_t, S_t = j, Y_{t-1};\theta)}{P(Y_{t-1};\theta)}$$
$$= P(y_t, S_t = j \mid Y_{t-1};\theta).$$

Sehingga diperoleh:

$$f(y_t \mid Y_{t-1};\theta) = \sum_{j=1}^{32} P(S_t = j \mid Y_{t-1};\theta) f(y_t \mid S_t = j, Y_{t-1};\theta) = 1'\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right).$$

Selanjutnya diperoleh

$$\frac{P(y_t, S_t = j \mid Y_{t-1};\theta)}{f(y_t \mid Y_{t-1};\theta)} = \frac{P(y_t, S_t = j \mid Y_{t-1};\theta)}{f(Y_{t-1};\theta)} \frac{P(Y_{t-1};\theta)}{f(y_t, Y_{t-1};\theta)}$$
$$= \frac{P(y_t, S_t = j, Y_{t-1};\theta)}{f(y_t, Y_{t-1};\theta)} = P(S_t = j \mid y_t, Y_{t-1};\theta) = P(S_t = j \mid Y_{t-1};\theta).$$

Sehingga diperoleh

$$P(S_t = j \mid Y_{t-1};\theta) = \frac{P(y_t, S_t = j \mid Y_{t-1};\theta)}{f(y_t \mid Y_{t-1};\theta)}$$
$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t}{1'\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)}.$$

Penduga kemungkinan maksimum bagi θ diperoleh dengan memaksi-mumkan

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=2}^{T} \log f(y_t \mid Y_{t-1};\theta).$$

Dengan membuat turunan pertama dari *log-likelihood* terhadap parameter θ sama dengan nol, maka diperoleh:

$$\hat{\mu}_1 = -\frac{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j M_j (\Delta + M_{33-j}\mu_2)}{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j M_j^2}, \quad \hat{\mu}_2 = -\frac{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j}^{32} V_j M_{33-j} (\Delta + M_j \mu_1)}{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{32} K_j M_{33-j}^{\ 2}},$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j u_1(t,j) g(t,j)}{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j u_1(t,j)^2}, \quad \hat{\phi}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j u_2(t,j) g(t,j)}{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j u_2(t,j)^2}, \quad \hat{\phi}_3 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j u_3(t,j) g(t,j)}{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j u_3(t,j)^2},$$

$$\hat{\phi}_4 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j u_4(t,j) g(t,j)}{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j u_4(t,j)^2}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j g(t,j)^2}{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{32} V_j}.$$

Di mana:

- $V_j = \frac{P(S_t = j \mid Y_{t-1};\theta) f(y_t \mid S_t = j, Y_{t-1};\theta)}{f(y_T \mid Y_{T-1};\theta)}$
- $\Delta = y_t - y_{t-1}\phi_1 - y_{t-2}\phi_2 - y_{t-3}\phi_3 - y_{t-4}\phi_4$
- $g(t,j) = y_t - B_{j1} + \phi_1(y_{t-1} - B_{j2}) + \phi_2(y_{t-2} - B_{j3}) + \phi_3(y_{t-3} - B_{j4}) + \phi_4(y_{t-4} - B_{j5}),$

- $M =$
$\{-1+\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4,\ -1+\phi_1+\phi_2+\phi_3,\ -1+\phi_1+\phi_2+\phi_4,\ -1+\phi_1+\phi_2,\ -1+\phi_1+\phi_3+\phi_4,\ -1+\phi_1+\phi_3,$
$-1+\phi_1+\phi_4,\ -1+\phi_1, -1+\phi_2+\phi_3+\phi_4, -1+\phi_2+\phi_3, -1+\phi_2+\phi_4, -1+\phi_2, -1+\phi_1+\phi_3+\phi_4, -1+\phi_3, -1+\phi_4,$
$-1,\ \phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4,\ \phi_1+\phi_2+\phi_3,\ \phi_1+\phi_2+\phi_4,\ \phi_1+\phi_2,\ \phi_1+\phi_3+\phi_4,\ \phi_1+\phi_3,\ \phi_1+\phi_4,\ \phi_1, \phi_2+\phi_3+\phi_4,\ \phi_2+\phi_3,$
$\phi_2+\phi_4,\ \phi_2,\ \phi_3+\phi_4,\ \phi_3,\ \phi_4, 0\}$

- $u_1(t,j) = \begin{cases} y_{t-1} - \mu_1 & 1 \le j \le 8 \ \& \ 17 \le j \le 24 \\ y_{t-1} - \mu_2 & \text{lainnya} \end{cases}$

- $u_2(t,j) = \begin{cases} y_{t-2} - \mu_1 & 1 \le j \le 4 \ \& \ 9 \le j \le 12 \ \& \\ & 17 \le j \le 20 \ \& \ 25 \le j \le 28 \\ y_{t-2} - \mu_2 & \text{lainnya} \end{cases}$

- $u_3(t,j) = \begin{cases} y_{t-3} - \mu_1 & 1 \le j \le 2 \ \& \ 5 \le j \le 6 \ \& \ 9 \le j \le 10 \ \& \ 13 \le j \le 14 \ \& \\ & 17 \le j \le 18 \ \& \ 21 \le j \le 22 \ \& \ 25 \le j \le 26 \ \& \ 29 \le j \le 30 \\ y_{t-3} - \mu_2 & \text{lainnya} \end{cases}$

- $u_4(t,j) = \begin{cases} y_{t-4} - \mu_1 & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ y_{t-4} - \mu_2 & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$

Karena persamaan $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3, \hat{\phi}_4$, dan $\hat{\sigma}^2$ yang diperoleh tak-linear, untuk mencari penduga kemungkinan maksimum bagi θ digunakan algoritme iteratif, yang merupakan kasus khusus dari prinsip *Expectation Maximization* (EM). Langkah-langkah yang harus dilakukan adalah sebagai berikut.

Algoritme untuk memperoleh penduga parameter yang memaksimumkan fungsi *likelihood*

Langkah 1:

Input T banyaknya data nilai tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika yang akan diamati.

Input data nilai tukar Rupiah $(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_T)$ dan matriks transisi P.

Beri nilai awal bagi $\hat{\theta}$ yang dilambangkan dengan $\hat{\theta}^{(0)} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2)$.

Set $k = 1$

Langkah 2:

Tentukan fungsi kerapatan bersyarat bagi y_t, yaitu η_t untuk setiap $t = 1, 2, \cdots, k$.

Langkah 3:

Penarikan kesimpulan optimal dan peramalan untuk setiap waktu t diperoleh melalui iterasi:

3.1. Tentukan nilai awal $\hat{\xi}_{1|0} = \pi$ yang memenuhi $\pi = P\pi$ dan $\sum_{i=1}^{32} \pi_i = 1$.

3.2. Beri nilai awal $i = 1$

3.3. Untuk $t = i$, cari nilai dari

$$f\left(y_t \middle| \mathcal{Y}_{t-1}; \hat{\theta}^{(m)}\right) = \mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1}\right) \otimes \eta_t$$

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)}{\mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)}$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = P \cdot \hat{\xi}_{t|t}$$

$$i = i + 1$$

3.4. Ulangi mulai dari langkah (3.3)

Stop jika $t = k$.

Langkah 4:

Tentukan nilai dari $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3, \hat{\phi}_4, \hat{\sigma}^2$.

Langkah 5:

Beri nama parameter yang dihasilkan pada langkah 4 dengan

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3, \hat{\phi}_4, \hat{\sigma}^2\right)$$

Langkah 6:

Tentukan matriks P yang baru menggunakan hasil Kim, C.J (1994) dan Hamilton, J. D. (1994), yaitu:

$$\hat{\xi}^{(j)}_{t|T} = \hat{\xi}^{(j)}_{t|t} \otimes \left\{ P'.\left[\hat{\xi}^{(j)}_{t+1|T} (\div) \hat{\xi}^{(j)}_{t+1|t} \right] \right\}$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \frac{\hat{\xi}^{(j)}_{t|T} \times \hat{\xi}^{(i)}_{t-1|t-1} \times p_{ij}}{\hat{\xi}^{(j)}_{t|t}}}{\sum_{t=2}^{T} \sum_{j=1}^{2} \frac{\hat{\xi}^{(j)}_{t|T} \times \hat{\xi}^{(i)}_{t-1|t-1} \times p_{ij}}{\hat{\xi}^{(j)}_{t|t}}}$$

Langkah 7:

Gunakan parameter yang sudah dihasilkan untuk menentukan dugaan bagi

$$\hat{Y}_k = E\left[Y_k \mid \mathcal{Y}_{k-1}; \hat{\theta} \right] = \sum_{j=1}^{N} \hat{\xi}_{k|k-1} E\left[Y_k \mid X_k = j, \mathcal{Y}_{k-1}; \hat{\theta} \right].$$

Jika $k < T$, $k =$ $k + 1$, ulangi langkah 2.

4. INTERPRETASI MODEL

Parameter model *hidden* Markov empat waktu sebelumnya berbentuk

$$\theta = \left(\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \sigma^2\right).$$

Menggunakan data input yang merupakan data rata-rata nilai tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika per bulan yang diambil dari situs *www.bankofcanada.ca*. yang diakses pada bulan Mei 2011, parameter tersebut akan diduga. Data berkisar antara bulan Februari 1998 hingga April 2011 yang berarti ada 158 data observasi.

Menggunakan algoritme pada bagian 3 dibuat program menggunakan software *Mathematica 7*. Dengan nilai awal

$$\mu = \begin{bmatrix} 14548,60 \\ 5454,46 \end{bmatrix} \qquad \phi = \begin{bmatrix} 0,566906 \\ 0,188787 \\ 0,859151 \\ 0,921183 \end{bmatrix} \qquad \sigma = 1065,3$$

diperoleh penduga parameter

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 10.052,80 \\ 9.345,61 \end{bmatrix} \quad \hat{\phi} = \begin{bmatrix} 0,317448 \\ 0,724923 \\ -0,0725215 \\ 0,139089 \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma} = 6.424,76\,.$$

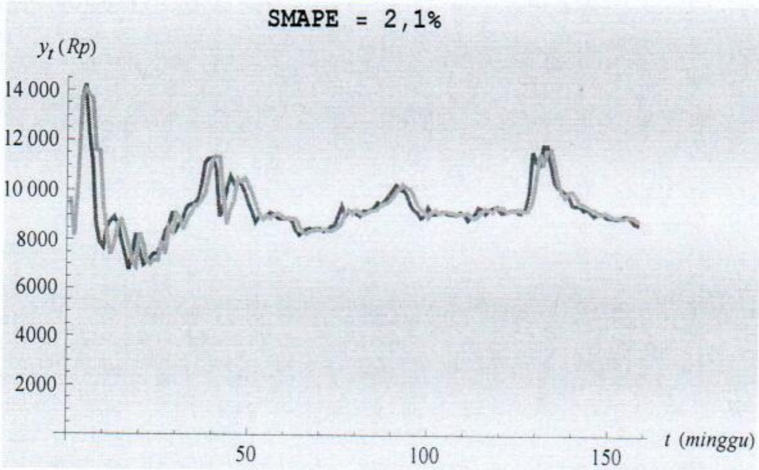
Untuk mengukur keakuratan model digunakan *Symmetric Mean Absolute Percentage Error* (SMAPE). SMAPE adalah sebuah ukuran keakuratan berdasarkan persentase galat yang biasanya didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{SMAPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|A_t - F_t|}{(A_t + F_t)/2}$$

di mana A_t adalah data asli sedangkan F_t adalah data duga dan n adalah banyak data. Berbeda dengan MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) yang tidak memiliki batas atas maupun batas bawah, SMAPE memiliki keduanya. Kisaran nilai SMAPE berdasarkan rumus di atas berada pada rentang 0% hingga 200%. Pada kenyataannya, kisaran dari 0% hingga 100% dianggap lebih bisa menginterpretasikan keakuratan sesungguhnya, sehingga pada prakteknya rumus di bawah ini lebih sering digunakan:

$$\text{SMAPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|A_t - F_t|}{(A_t + F_t)}.$$

Symmetric Mean Absolute Percentage Error (SMAPE) yang diperoleh sebesar 2,1%. Nilai galat maksimum absolut adalah 19,16% dan nilai galat minimum absolut adalah 0,0036%. Dari hasil ini dapat dilihat bahwa deret waktu *hidden* Markov empat waktu sebelumnya cukup berhasil menggambarkan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika yang diperoleh dari data yang ada. Gambaran lebih jelas bisa dilihat di Gambar 2.

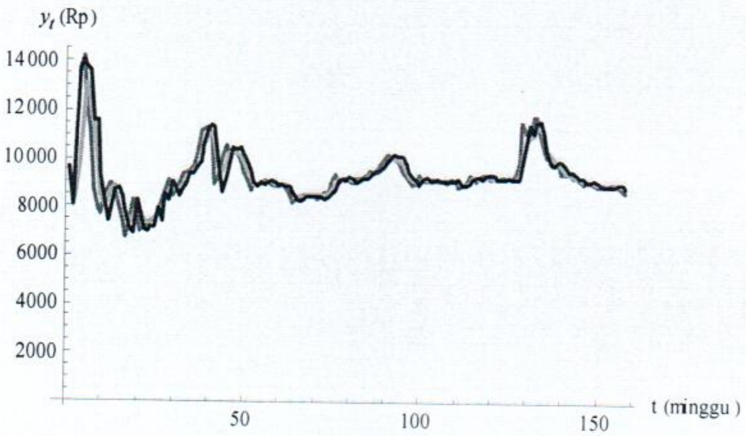


Gambar 2. Grafik Nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika dan Nilai Dugaan Model Deret waktu *hidden* Markov Empat Waktu Sebelumnya.

5. PERBANDINGAN DENGAN MODEL DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV TIGA WAKTU SEBELUMNYA

Meskipun model deret waktu *hidden* Markov empat waktu sebelumnya sudah bisa melakukan pendugaan nilai tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika dengan baik, namun masih belum lebih baik daripada model deret waktu *hidden* Markov tiga waktu sebelumnya. Hal ini cukup mengherankan karena diasumsikan bahwa bertambahnya deret waktu akan membuat model menjadi lebih baik dalam melakukan pendugaan.

Hasil yang diperoleh dari model deret waktu *hidden* Markov tiga waktu sebelumnya adalah sebagai berikut: *Symmetric Mean Absolute Percentage Error* (SMAPE) 1,61%, galat maksimum absolut 17,2%, galat minimum absolut 0,0025%. Dengan SMAPE yang lebih kecil, model deret waktu *hidden* Markov tiga waktu sebelumnya melakukan pendugaan dengan lebih akurat. Galat maksimum absolut yang hanya sebesar 17,2% menunjukkan bahwa pendugaan tidak pernah terlalu menyimpang dari yang seharusnya. Gambaran lebih jelas bisa dilihat di Gambar 3.



Gambar 3. Grafik Nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika dan Nilai Duganya dengan Menggunakan Model Deret Waktu *Hidden* Markov Tiga Waktu Sebelumnya dan Model Deret Waktu *Hidden* Markov Empat Waktu Sebelumnya.

Hasil yang tidak lebih baik ini bisa juga disebabkan oleh lebih kompleksnya model yang digunakan. Bertambahnya deret waktu menyebabkan bertambahnya jumlah *state* secara signifikan. Akibatnya perhitungan numeriknya semakin kompleks yang sangat mungkin disertai pembulatan di setiap iterasi. Hal ini bisa menyebabkan keakuratan model berkurang.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. **Hamilton JD**. 1990. Analysis of time Series Subject to Changes in Regime. *Journal of Econometrics* 45:30-70.

[2]. **Kim, C. J**. 1994. Dynamic linear models with Markov switching. *Journal of Econometrics*, 60: 1 – 22.

[3]. **Hamilton JD.** 1994. *Time Series Analysis.* Princeton University Press, New Jersey.

[4]. **Setiawaty, B., A.D. Purnmo, dan N. K. K. Ardana.** 2011. Pemodelan nilai tukar Rupiah terhadap $US menggunakan deret waktu tiga waktu sebelumnya. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Vol 10, No 1.