

# BIFURKASI *HETEROCLINIC* PADA MODEL MANGSA-PEMANGSA

KUSNANTO, A.

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Pertanian Bogor  
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

**Abstrak** : Model mangsa pemangsa yang memuat respon fungsional berbentuk *Michaelis-Menten-Holling* merupakan salah satu model mangsa pemangsa dengan dinamika solusinya yang sangat kompleks. Dalam model ini akan didapatkan bifurkasi Hopf dan kemunculan *limit cycle* serta keberadaan bifurkasi *heteroclinic*. Dalam tulisan ini akan ditunjukkan kelas-kelas parameter yang memunculkan bifurkasi Hopf dan *heteroclinic*.

**Kata kunci**: bifurkasi Hopf, bifurkasi *heteroclinic*, dan mangsa pemangsa.

## 1. PENDAHULUAN

Mangsa-pemangsa merupakan salah satu jenis interaksi antara dua atau lebih spesies di dalam suatu lingkungan hidup. Pada hubungan mangsa-pemangsa dua spesies, satu spesies yang menjadi mangsa menentukan laju pertumbuhan spesies pemangsa karena spesies mangsa ini menjadi makanan bagi spesies pemangsa untuk pertumbuhan dan perkembangbiakannya. Sebaliknya, spesies pemangsa akan menyebabkan turunnya laju pertumbuhan spesies mangsa. Model mangsa-pemangsa yang dipelajari adalah model mangsa-pemangsa Lotka-Volterra.

Pengembangan model mangsa pemangsa ini difokuskan pada pemilihan fungsi interaksi antara mangsa dan pemangsa yang disebut dengan respon fungsional. Berdasarkan respon fungsional ini, dikenal adanya model May, Holling (tipe I, II dan III), Bazykin dan Michaelis-Menten (Metzler and Wischniewsky, 1985). Perbedaan dari model-model ini terletak pada pemilihan asumsi yang dikenakan dalam model.

Berezovskaya, Karev dan Arditi (2001) telah mengembangkan model mangsa pemangsa terpaut rasio yang kemudian dilakukan analisa terhadap parameter

yang terlibat. Dalam pembahasannya, telah ditemukan adanya bifurkasi dalam model tersebut. Analisa seperti yang mereka lakukan, selanjutnya dikembangkan dalam tulisan ini dengan memilih parameter-parameter tertentu yang memunculkan bifurkasi *heteroclinic*.

## 2. PERMODELAN DAN PENONDIMENSIONALAN

Model mangsa-pemangsa yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah model yang dikembangkan oleh Arditi dan Ginzburg (1989). Model ini merupakan model mangsa pemangsa terpaut rasio antara pemangsa dan mangsa, yang dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} N_t &= rN \varphi(N) - g\left(\frac{N}{P}\right)P \\ P_t &= eg\left(\frac{N}{P}\right)P - qP \end{aligned} \quad (1)$$

dengan  $rN \varphi(N)$  merupakan laju pertumbuhan mangsa tanpa adanya pemangsa,  $qP$  merupakan laju kematian pemangsa tanpa adanya mangsa dan fungsi  $g(x) = g\left(\frac{N}{P}\right)$  merupakan *trophic function* (level dari jenis pemangsaan). Dalam tulisan ini akan dipilih  $N\varphi(N)$  merupakan bentuk fungsi logistic dan  $g\left(\frac{N}{P}\right) = \frac{aN}{P+ahN}$  yang merupakan bentuk Holling tipe II. Dengan demikian model dalam persamaan (1) di atas dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} N_t &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{aN}{P+ahN}P \\ P_t &= \frac{eaN}{P+ahN}P - qP \end{aligned} \quad (2)$$

Selanjutnya dengan melakukan penondimensionalan model (2) di atas, yaitu dengan memilih transformasi  $x = \frac{N}{K}$ ,  $y = \frac{P}{Kah}$ ,  $\tau = \frac{t}{r}$  dan pengubahan nilai parameter baru  $\alpha = \frac{a}{r}$ ,  $\beta = \frac{e}{rh}$ ,  $\gamma = \frac{q}{r}$  akan diperoleh model baru sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_\tau &= x(1-x) - \frac{\alpha xy}{x+y} \\ y_\tau &= -\gamma y + \frac{\beta xy}{x+y} \end{aligned} \quad (3)$$

Dalam model (3), parameter  $\gamma$  merepresentasikan laju kematian pemangsa (baru). Komponen *trophic function* dicirikan oleh dua parameter  $\alpha$  dan  $\beta$ . Parameter  $\alpha$  dapat diartikan sebagai angka kematian mangsa maksimum karena adanya predasi untuk tak terbatas jumlah predator. Parameter  $\beta$  adalah tingkat pertumbuhan maksimum predator untuk jumlah mangsa tak terbatas.

## 3. KESTABILAN TITIK TETAP

Titik tetap model (3) adalah  $T_0(0,0)$ ,  $T_1(1,0)$  dan  $T_2(x^*, y^*)$  dengan  $x^* = 1 - \alpha \frac{\beta - \gamma}{\beta}$  dan  $y^* = \frac{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha(\beta - \gamma))}{\beta \gamma}$ . Dengan melakukan pelinearan pada model (3), akan diperoleh matriks Jacobi berikut



$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \frac{\alpha y^2}{(x+y)^2} & -\frac{\alpha x^2}{(x+y)^2} \\ \frac{\beta y^2}{(x+y)^2} & -\gamma + \frac{\beta x^2}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

Matriks Jacobi untuk titik tetap  $T_0$  adalah  $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$ , sehingga nilai eigennya  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_2 = -\gamma$ . Karena  $\gamma > 0$  maka dapat disimpulkan bahwa  $T_0$  bersifat sadel (Strogatz,1994). Matriks Jacobi untuk titik tetap  $T_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\gamma \\ 0 & -\gamma + \beta \end{pmatrix}$ , sehingga nilai eigennya  $\lambda_1 = -1$  dan  $\lambda_2 = -\gamma + \beta$ . Dari hasil ini dapat disimpulkan bahwa  $T_1$  akan bersifat sadel jika  $\beta > \gamma$  dan simpul stabil jika  $\beta < \gamma$  (Strogatz,1994).

Titik tetap  $T_2(x^*, y^*)$  dengan  $x^* = 1 - \alpha \frac{\beta - \gamma}{\beta}$  dan  $y^* = \frac{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha(\beta - \gamma))}{\beta \gamma}$  akan berada di kuadran pertama jika memenuhi  $x^* > 0$  atau  $1 - \alpha \frac{\beta - \gamma}{\beta} > 0$  dan  $y^* > 0$  atau  $\frac{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha(\beta - \gamma))}{\beta \gamma} > 0$ . Agar  $1 - \alpha \frac{\beta - \gamma}{\beta} > 0$ , maka haruslah berlaku  $\alpha < \frac{\beta}{\beta - \gamma}$ . Agar  $\frac{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha(\beta - \gamma))}{\beta \gamma} > 0$  dan memenuhi  $\alpha < \frac{\beta}{\beta - \gamma}$ , maka haruslah berlaku  $\beta > \gamma$ . Sehingga syarat agar  $T_2$  ada dalam kuadran I adalah

$$\alpha < \frac{\beta}{\beta - \gamma} \text{ dan } \beta > \gamma. \tag{4}$$

Selanjutnya jika dipandang parameter  $\alpha$  dan  $\beta$  berubah, maka ada kondisi dimana nilai  $\alpha = \beta$ . Dalam kondisi ini berarti nilai  $x^* = 1 - (\beta - \gamma) > 0$ , mengakibatkan  $\beta < \gamma + 1$ . Demikian juga dengan nilai  $y^* = \frac{(\beta - \gamma)(1 - (\beta - \gamma))}{\gamma} > 0$  akan mengakibatkan  $\gamma < \beta < \gamma + 1$ .

Nilai eigen dari titik tetap  $T_2$  adalah

$$\frac{1}{2} \left( \alpha - 1 - \frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\beta} - \gamma \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{A}$$

dengan

$$A = (\alpha + \gamma - 1)^2 + \frac{2\alpha \gamma^2}{\beta^2} (1 - \alpha) + \frac{2\gamma^2}{\beta^2} (3\alpha - 1) + \frac{\alpha \gamma^4}{\beta^3} \left( \frac{\alpha}{\beta} - 2 \right) + \frac{2\gamma^3}{\beta} \left( \frac{3\alpha}{\beta} - 1 \right) + \frac{\gamma^4}{\beta^2}$$

Syarat perlu agar kondisi bifurkasi Hopf tercapai adalah jika nilai eigen sama dengan imajiner murni (Strogatz,1994). Ini berarti bagian real dari  $\alpha - 1 - \frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\beta} - \gamma = 0$  dan  $A < 0$ . Dari kondisi pertama akan diperoleh

$$\alpha = 1 + \frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\beta} + \gamma \text{ atau}$$

$$\alpha = \frac{\beta(\gamma + \frac{\beta}{\beta - \gamma})}{\beta - \gamma}, \tag{5}$$

dan dari kondisi kedua akan diperoleh  $\frac{4\gamma^2\beta^3(\beta-\gamma)(\beta-1-\gamma)}{\beta+\gamma} < 0$ . Karena syarat persamaan (4) yaitu  $\beta > \gamma$  maka persamaan ini akan dipenuhi jika

$$\beta < \gamma + 1, \quad (6)$$

#### 4. PERILAKU SISTEM DI SEKITAR TITIK TETAP

Dari persamaan (4) diperoleh suatu parameter batas, yaitu  $\alpha = \frac{\beta}{\beta-\gamma}$  dan  $\beta = \gamma$  yang mengubah struktur sistem (3). Misalkan didefinisikan kurva  $K_1: \beta = \gamma$  dan  $K_2: \alpha = \frac{\beta}{\beta-\gamma}$  yang merupakan batas keberadaan  $T_2$ . Dapat dilihat bahwa dalam kondisi  $\beta = \gamma$  maka titik tetap  $T_2$  akan menyatu dengan titik tetap  $T_1$ . Demikian juga jika kondisi  $\alpha = \frac{\beta}{\beta-\gamma}$  maka titik tetap  $T_2$  akan menyatu dengan titik tetap  $T_0$ .

Dari persamaan (4), (5) dan (6), diperoleh suatu parameter batas yang mengakibatkan terjadinya bifurkasi Hopf pada titik tetap  $T_2$ . Misalkan batas parameter ini digambarkan dalam sebuah kurva  $K_3$ , maka  $K_3: \alpha = \frac{\beta(\gamma + \frac{\beta}{\beta-\gamma})}{\beta-\gamma}$ ,  $\gamma < \beta < \gamma + 1$ .

#### 4. LIMIT CYCLE DAN BIFURKASI HETROCLINIC

Dari pembahasan pada subbab (3), untuk setiap  $\gamma$  yang dipilih maka akan muncul bifurkasi Hopf pada saat parameter melalui kurva  $K_3$ . Karena syarat  $\gamma < \beta < \gamma + 1$ , maka posisi kurva  $K_3$  ini akan berada di sebelah kiri kurva  $K_2$ . Sehingga jika nilai parameter  $\beta$  bergerak dari kiri ke kanan melalui kurva  $K_3$ , maka disebelah kanan  $K_3$  akan muncul *limit cycle* yang bentuknya dari kecil membesar. Tetapi pada saat melewati  $K_1$  maka titik tetap  $T_2$  akan menghilang karena menyatu dengan  $T_0$  sehingga otomatis *limit cycle*-nya akan menghilang. Sehingga terjadinya *limit cycle* berada pada daerah yang dibatasi oleh kurva  $K_2$  dan  $K_3$  yang berpotongan pada  $\alpha = \gamma + 1$ . (lihat Gambar 1).

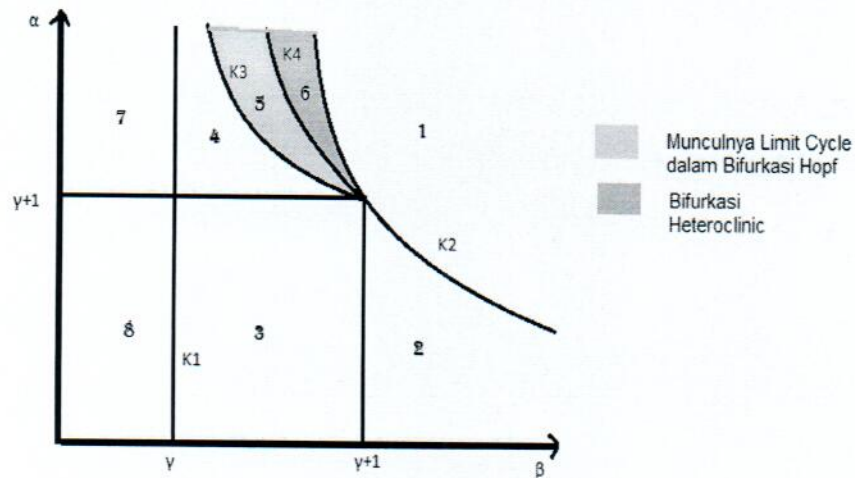
Pada saat  $\beta$  bergerak dari kiri ke kanan melalui kurva  $K_3$  akan muncul *limit cycle*, nilai  $\beta$  pada saat melalui  $K_3$  ini disebut  $\beta_H$  ( $\beta$  Hopf). Karena bentuk *limit cycle* ini terbatas, maka akan ada orbit dari arah  $T_1$  yang bersifat sadel yang menuju  $T_0$  yang bersifat sadel juga, yang menjadi pembatas antara orbit yang menuju *limit cycle* dan orbit yang menjauhi *limit cycle*. Jika nilai  $\beta$  bertambah maka akan muncul kondisi sesaat pada saat *limit cycle* menghilang dan adanya orbit yang menghubungkan titik tetap  $T_1$  dengan  $T_0$ . Kondisi inilah yang disebut heteroclinic cycle. Sebut orbit ini sebagai *kurva*- $T_1T_0$  dan nilai  $\beta$  pada kondisi ini disebut  $\beta_L$  ( $\beta$  Heteroclinic). Kondisi ini akan menghilang pada saat nilai  $\beta$  dinaikkan. Kondisi inilah yang mengakibatkan terjadinya bifurkasi heteroclinic. Kondisi ini terjadi pada saat

$$\gamma + 1 < \alpha < \frac{\beta}{\beta-\gamma} \text{ dan } \gamma < \beta < \gamma + 1 \quad (7)$$

Misalkan batas parameter yang memunculkan bifurkasi heteroclinic ini disebut  $K_4$ , maka  $K_4: \gamma + 1 < \alpha < \frac{\beta}{\beta-\gamma}$ ,  $\gamma < \beta < \gamma + 1$ . Hubungan antara parameter-



parameter yang terlibat, dapat dilihat dalam Gambar 1, yang memisahkan kondisinya menjadi 8 daerah yang berbeda.



Gambar 1 Hubungan antar parameter

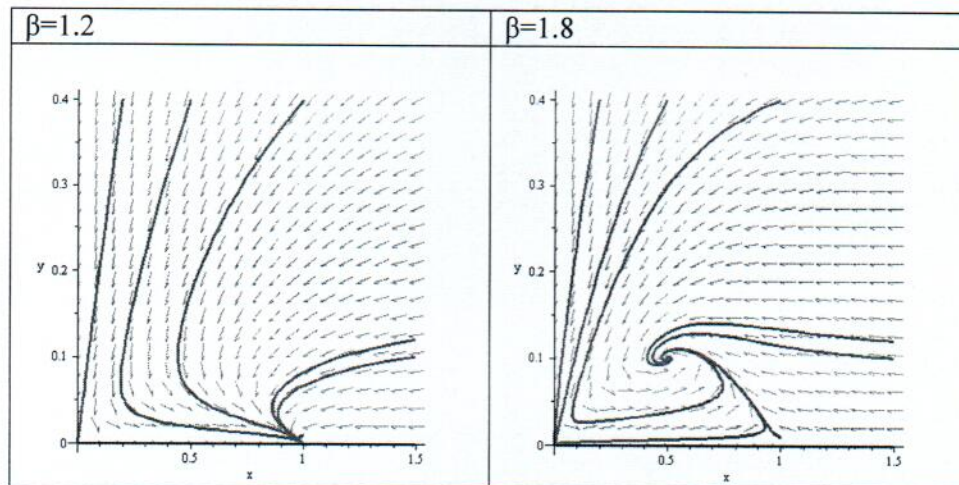
### 5 SIMULASI

Dalam simulasi ini akan ditunjukkan beberapa kemungkinan bentuk model. Parameter  $\gamma$  yang merepresentasikan laju kematian pemangsa diasumsikan bernilai 1.5. Hal ini mengartikan bahwa tingkat kematian pemangsa tanpa adanya mangsa adalah 1.5 lebih besar dibandingkan laju instrinsik mangsa. Parameter  $\alpha$  dalam simulasi ini dipilih bernilai 3 yang dapat diartikan sebagai angka kematian mangsa maksimum karena adanya predasi untuk tak terbatas jumlah pemangsa. Parameter  $\beta$  yang merupakan tingkat pertumbuhan maksimum predator untuk jumlah mangsa tak terbatas dipilih bernilai antara 1.2 sampai dengan 2.9. Pemilihan nilai-nilai parameter seperti dalam Tabel 1, ditujukan untuk menunjukkan perubahan struktur titik tetap dan kestabilannya sekaligus menunjukkan keberadaan bifurkasi Hopf dan *heteroclinic* pada model ini.

Tabel 1 Pemilihan nilai parameter model

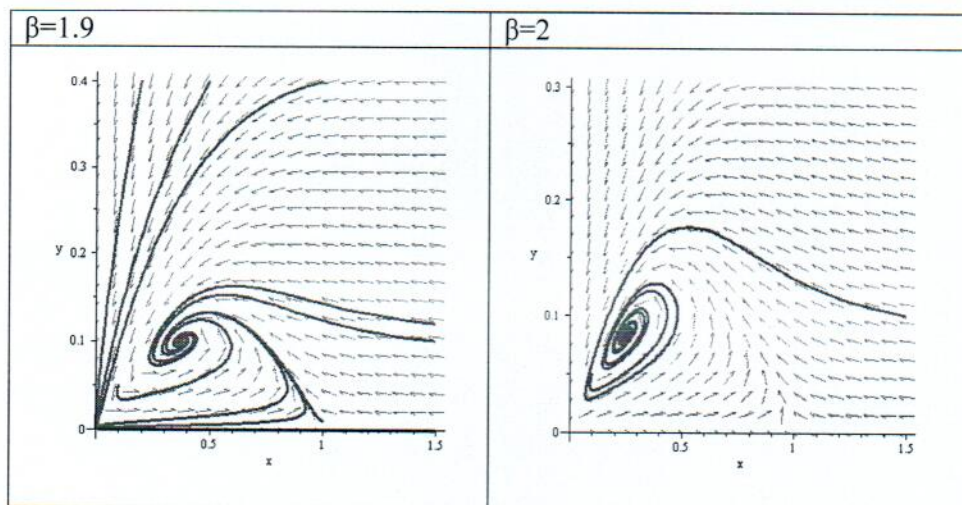
Kasus	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$T_0$	$T_1$	$T_2$	Daerah
1	3	1.2	1.5	sadel	simpul stabil	-	7
2	3	1.8	1.5	sadel	sadel	spiral stabil	4
3	3	1.9	1.5	sadel	sadel	spiral stabil	4
4	3	2	1.5	sadel	sadel	spiral stabil	4
5	3	2.15	1.5	sadel	sadel	spiral tak stabil	5
6	3	2	1.5	sadel	sadel	spiral tak stabil	5
7	3	2.2	1.5	sadel	sadel	spiral tak stabil	6
8	3	2.25	1.5	sadel	sadel	-	1
9	3	2.9	1.5	sadel	sadel	-	1

Dalam kasus pertama, dipilih  $\beta < \gamma$ , yang mengartikan bahwa laju pertumbuhan pemangsa lebih kecil dari laju kematiannya. Dalam hal ini akan terjadi kepunahan pemangsa (lihat Gambar 2a). Jika nilai  $\beta$  dinaikkan sehingga  $\beta > \gamma$  maka terjadi kebersamaan keberadaan populasi (koeksistensi). Dalam hal ini kestabilan akan menuju ke titik tetap  $T_2$  (Gambar 2b) dan nilai parameter berada pada daerah 4 (lihat Gambar 1)



Gambar 2 Kemunculan titik tetap ke-3

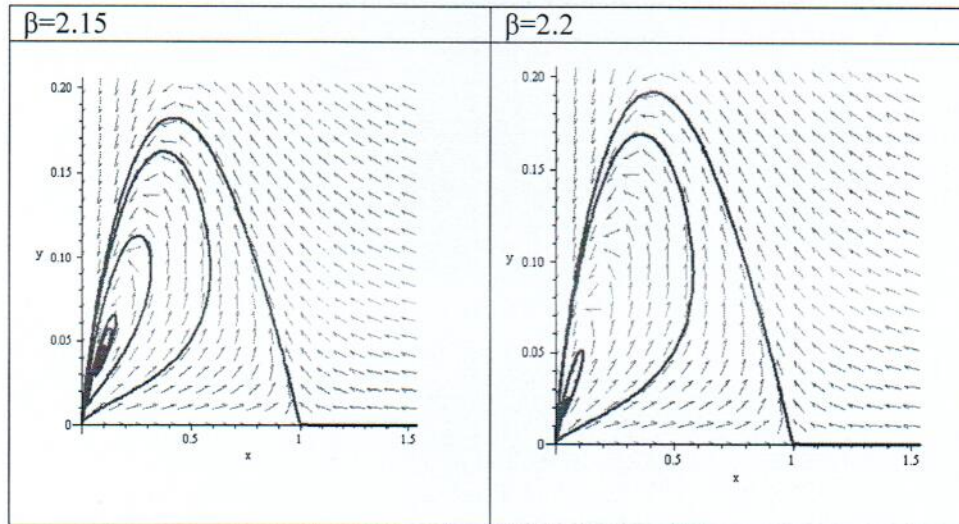
Jika nilai parameter  $\beta$  dinaikkan, maka nilai parameter yang berada pada daerah 4 akan bergeser ke daerah 5. Pada daerah 5 ini akan muncul *limit cycle* seperti terlihat pada Gambar 3. Jika nilai  $\beta$  terus dinaikkan maka bentuk *limit cycle* akan semakin membesar sampai suatu kondisi yang mengakibatkan bentuk *limit cycle*-nya mengecil kembali dan selanjutnya menghilang. (lihat Gambar 4 dan Gambar 5).



Gambar 3 Bifurkasi Hopf dan Kemunculan *Limit cycle*

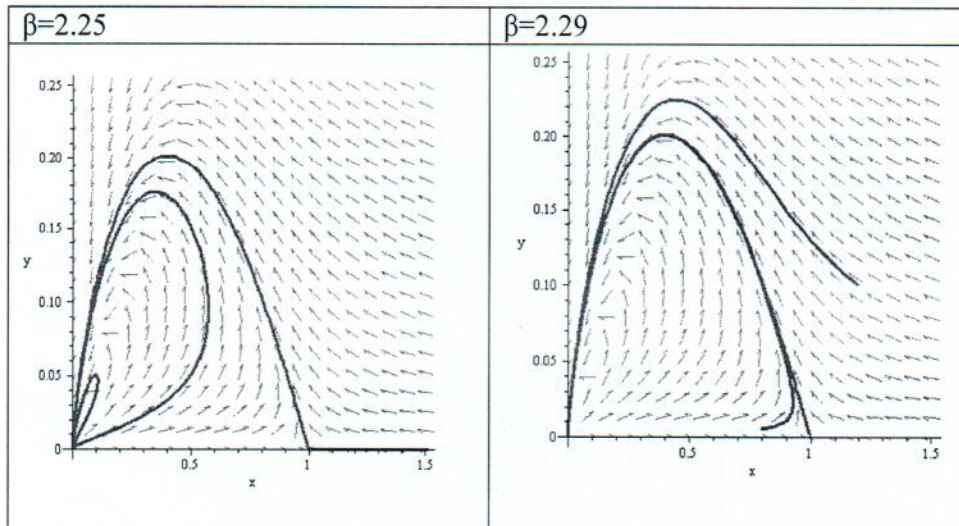


Pada saat nilai parameter  $\beta$  dinaikkan dari 2.15 ke 2.2, bentuk *limit cycle* semakin mengecil dan posisinya menuju ke titik (0,0) dan akhirnya akan menghilang bersamaan dengan bergabungnya  $T_2$  dengan  $T_0$ . Dalam kondisi sebelum bergabungnya titik tetap  $T_2$  dengan titik tetap  $T_0$ , akan ada fenomena dimana terjadinya orbit yang menghubungkan  $T_1$  dengan  $T_0$ . Munculnya orbit yang menghubungkan 2 titik tetap sadel inilah yang disebut bifurkasi *heteroclinic*. Fenomena ini dapat dilihat dalam Gambar 4.



Gambar 4 Munculnya Bifurkasi Heteroclinic

Jika nilai  $\beta$  dinaikkan kembali, maka titik tetap  $T_2$  akan menghilang dan mengakibatkan kondisi dimana populasi mangsa dan pemangsa keduanya punah. (Gambar 5).



Gambar 5 Hilangnya titik tetap ke 3

## 5 KESIMPULAN

Dengan menaikkan/menurunkan parameter yang menyatakan tingkat interaksi mangsa dan pemangsa, dapat diperoleh 8 kondisi daerah berbeda. Terdapat 2 daerah yang mengakibatkan kepunahan pemangsa, 2 daerah yang menyebabkan kepunahan mangsa dan pemangsa dan 4 daerah dimana kedua populasi mangsa dan pemangsa eksis.

Dengan memilih parameter yang tepat, dapat ditunjukkan keberadaan bifurkasi Hopf dan bifurkasi *heteroclinic*. Kemunculan bifurkasi *heteroclinic* terjadi beberapa saat sebelum bergabungnya 2 titik tetap.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] **Aditi R and Ginzburg LR.** 1989. Coupling in predator-prey dynamics: ratio dependence. *Journal Theor. Biol*, 139,311-326.
- [2] **Berezovskaya F, Karev G and Arditi R.**2001. Parameter analysis of the ratio-dependent predator-prey model. *J. Math. Biol* 43, 221-246..
- [3] **Metzler W and Wischniewsky W.** 1985. Bifurcations of equilibria in Bazykin's predator-prey model, *Mathematical Modelling*, Vol. 6. pp 111-123.
- [4] **Strogatz SH.** 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos With Application to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusets.