MASALAH DIRICHLET UNTUK PERSAMAAN BEDA DALAM GRAF TERBOBOTI

GARNADI, A.D. DAN E. KHATIZA

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

ABSTRAK. Permasalahan umum persamaan diferensial parsial dapat ditirukan ke dalam graf, khususnya dalam graf terhubung tak berarah. Definisikan fungsi bernilai real $f(x)$ untuk verteks, *x*, di *G* dan ruang Hilbert $L^2(G)$ yang dibentuk oleh semua fungsi $f : G \to R$. Berdasarkan sifat seminorma pada $L^2(G)$ definisikan subruang $H^1(G)$ yang tersusun dari semua fungsi bernilai nol. Relasi ekuivalensi yang terdapat dalam $L^2(G)$ mengakibatkan subruang $H^1(G)$ dapat diidentifikasi melalui ruang kuosen $\tilde{L}^2(G) = L^2(G)/\sim$. Penyesuaian untuk fungsi dua variabel dilakukan dengan menambahkan definisi turunan berarah dalam variabel pertama. Definisi dan notasi pada graf G dapat diterapkan pada $\overline{S} = S \cup \partial S$ dengan *S* adalah subgraf terimbas *G* yang memiliki batas ∂S. Dalam masalah Dirichlet, pembahasan difokuskan pada graf terimbas *S* dari *G* dengan bobot $\varpi(x, y)$ yang dipadankan pada setiap sisi di *G*. Asumsikan batas ∂S kosong dan definisikan $f : S \to R$. Solusi dari masalah Dirichlet ekuivalen dengan solusi masalah variasional. Masalah Dirichlet non homogen dengan fungsi yang diberikan $g : \partial S \to R$, dapat direduksi ke dalam masalah Dirichlet homogen. Solusi dari masalah ini diberikan menggunakan fungsi Green. Pendekatan ini cukup bagus bila dibandingkan dengan masalah identifikasi Berenstein dan Chunng [2].

Kata Kunci: Masalah Dirichlet, graf terboboti, dan ruang kuosen

1. PENDAHULUAN

Dalam sistem diskret, graf menggambarkan suatu alat dasar untuk mempelajari hubungan antarunsur. Baru-baru ini telah ada artikel menarik dalam literatur yang memiliki tujuan menirukan permasalahan umum persamaan diferensial parsial dalam graf. Secara khusus, *Discrete Laplacian* telah dipertimbangkan dan *Discrete Green Function* telah diperkenalkan dan dipelajari (lihat Chung dan Yau[3]). Lebih aktual lagi, Berenstein dan Chung[2] telah menjalankan suatu langkah penganalogian yang cukup jauh dengan memperkenalkan gradien diskret dan prinsip Dirichlet, mempertimbangkan masalah Dirichlet dan Neuman serta pertanyaan-pertanyaan identifikasi. Karena kita berhubungan dengan masalah-masalah dimensional hingga, rumus-rumus lebih banyak atau lebih sedikit ekuivalen dan sangatlah penting untuk mencari penyajian yang paling sederhana. Disini, kita mencoba untuk menirukan formulasi variasional dari Masalah Nilai Batas berdasarkan Lions [4]. Ini adalah pendekatan yang mengarah pada penyajian yang lebih sederhana. Selanjutnya, kita memilih untuk bekerja dengan bobot tak ternormalkan daripada bobot ternormalkan. Tidak ada aspek penting yang hilang dan penormalan ini mencegah suatu formulasi variasional yang sudah jelas pada permasalahan untuk ditangani.

2. ASUMSI DAN NOTASI

Sekarang kita berikan definisi, asumsi, dan notasi utama.

2.1 Graf Terhubung Tak Berarah: Pada sebuah graf *G* yang dibuat dari *N* vertek (simpul) terdapat hubungan (disebut sisi) antara dua vertek *x* dan *y*. Kedua vertek tersebut dikatakan *adjacent*. Sisi dilambangkan dengan $\{x,y\}$, sebagai suatu notasi himpunan, sehingga bentuk $\{x,y\}=\{y,x\}$ memiliki makna tidak ada urutan dalam sisi atau graf tidak berarah. Notasi $x : y$ digunakan untuk dua vertek yang *adjacent*. Perlu dicatat bahwa mungkin terdapat sisi $\{x,x\}$ ataupun tidak. Graf *G* dikatakan terhubung jika untuk sembarang pasangan vertek *x* dan *y* terdapat sebuah barisan hingga, yang disebut suatu lintasan atau rantai, $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ sedemikian sehingga $x_{i-1} \sim x_i$, untuk setiap $i = 1, \ldots, n$. Dalam bagian pertama paper ini, hanya graf terhubung tak berarah yang akan dibahas.

Selanjutnya, subgraf $S \subset G$ memiliki arti *S* imbas dari *G* atau untuk setiap *x* dan *y* dalam *S*, sembarang lintasan yang menghubungkan *x* dan *y* tersusun atas vertek *S*. Jelas ini berimplikasi (tetapi tidak ekuivalen) bahwa semua sisi dari *G* yang menghubungkan vertek-vertek di *S* adalah sisi di *S*. Batas *S* didefinisikan sebagai berikut

$$\partial S = \{x \notin S \mid \exists y \in S, \ni x \sim y\}. \tag{1}$$

Berdasarkan definisi graf terimbas, diperoleh sifat

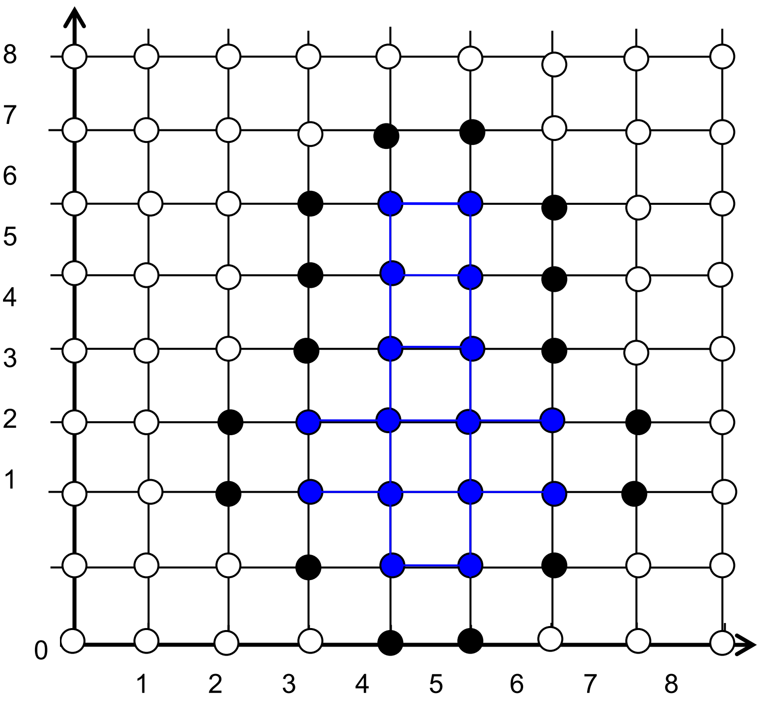
Jika $x, x' \in \partial S$, maka *x* tidak *adjacent* dengan *x'*. (2)

Misalkan *x* dan *x*' di ∂S, maka terdapat *y* dan *y*' di *S* sedemikian sehingga $x \sim y$ dan $x' \sim y'$. Jika $x \sim x'$ maka terdapat lintasan yang menghubungkan dua sisi di *S* yaitu *y* dan y'. Karena subgraf *S* terimbas maka semua lintasan harus ada di *S* sehingga *x* dan *x*'ada di *S*, kontradiksi dengan definisi batas ∂S.

Konsep batas dalam (*interior body*) dinyatakan sebagai

$$\partial \dot{S} = \{x \in S \mid \exists y \in \delta S, \ni x \sim y\}.$$

Definisikan $\overline{S} = S \cup \partial S$, sehingga sebuah vertek di *S* tidak bisa *adjacent* dengan vertek di $G \setminus \overline{S}$.



Gambar 1. Graf G dengan vertek pasangan koordinat

Misalkan G adalah Graf yang dibentuk dari vertek-vertek pasangan koordinat seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1. Subgraf S dibentuk dari vertek-vertek yang dinyatakan dalam himpunan pasangan koordinat

$$S = \{(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(3,3),(4,3),(5,3),$$
$$(6,3),(4,4),(5,4),(4,5),(5,5),(4,6),(5,6)\}$$

Maka diperoleh

$$\partial S = \{(4,0),(5,0),(3,1),(6,1),(2,2),(7,2),(2,3),(7,3),$$
$$(3,4),(6,4),(3,5),(6,5),(3,6),(6,6),(4,7),(5,7)\}$$

dan

$$\partial \tilde{S} = \{(4,1),(5,1),(3,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4),(5,4),(4,5),(5,5),(4,6),(5,6)\}.$$

2.2 Fungsi dalam graf: Perhatikan fungsi bernilai riil $f(x)$ yang terdefinisi untuk x di G. Fungsi-fungsi ini membentuk suatu ruang dimensi hingga R^N. Melalui penganalogian dengan ruang fungsional dapat didefinisikan :

$$\int_G f = \sum_{x \in G} f(x), \tag{3}$$

dan ruang Hilbert $L^2(G)$ dibentuk oleh semua fungsi $f : G \to R$, dengan perkalian skalar dan norma sebagai berikut:

$$(f,g) = \int_G fg, \qquad \|f\|_{L^2}^2 = \int_G f^2. \tag{4}$$

Selanjutnya definisikan turunan parsial atau turunan berarah di x

$$\partial_y f(x) = f(y) - f(x), \tag{5}$$

dan gradien di x

$$Df(x) = \partial_y f(x),\ y \in G. \tag{6}$$

Jelas akan diperoleh $\partial_y f(x) = -\partial_x f(y)$. Suatu seminorma $L^2(G)$ diperkenalkan dalam bentuk

$$| f |= \sqrt{\sum_x \sum_{y \sim x} (\partial_y f(x))^2}$$

Lema 1: Sifat berikut dipenuhi.

Jika $| f |= 0$, maka f adalah konstan.

Bukti: Dari definisi, jika $| f |= 0$, maka $f(y) = f(x)$ untuk setiap *y~x*. Tetapi jika *x, y* adalah dua vertek sembarang maka terdapat suatu rantai $x_0 = x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = y$ sedemikian sehingga $x_{i-1} \sim x_i$, untuk setiap $i = 1,2,3,...,n$. Oleh karena itu $f(x_{i-1}) = f(x_i)$, untuk $i = 1,2,3,...,n$, maka $f(y) = f(x)$, untuk setiap *x, y* di G.

Berdasarkan Lema 1, kita dapat mendefinisikan subruang $H^1(G)$ dari $L^2(G)$ yang disusun oleh semua fungsi dengan rataan nol. Jadi, jika rataannya diberikan oleh

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N}\int_G f$$

maka

$$H^1(G) = \{f \in L^2(G) : \langle f \rangle = 0\}. \tag{7}$$

Dengan norma yang didefinisikan sebagai

$$\| f \|_{H^1} = | f | = \sqrt{\sum_x \sum_{y \sim x} (\partial_y f(x))^2} \ . \tag{8}$$

Notasi ini mirip dengan notasi pada ruang Sobolev. Biasanya untuk fungsi di $H^1(G)$ norma dinotasikan dengan $\| . \|$ atau secara eksplisit $\| . \|_{H^1}$. Akan tetapi untuk sembarang fungsi di $L^2(G)$ digunakan seminorma dengan notasi $| . |$ sebagaimana dalam (8).

Subruang $H^1(G)$ dapat diinterpretasi ulang sebagai berikut. Pertama, definisikan relasi ekuivalensi dalam $L^2(G)$ dengan membangun

$$f \sim g \text{ jika dan hanya jika } f(x) - g(x) \text{ suatu konstanta}.$$

Selanjutnya, perhatikan ruang kuosen (*quotient space*) $\mathring{L}^2(G) = L^2(G)/\sim$, dilengkapi dengan norma

$$\| \mathring{f} \|_{\mathring{L}^2} = \| f - \langle f \rangle \|_{L^2}{}^2 , \tag{9}$$

dimana $\mathring{f}$ adalah kelas ekuivalen, sebagai suatu wakil f. Jelas wakil $\mathring{f}$ dapat diambil dari elemen dengan rataan nol.

Seminorma H^1 menjadi suatu norma dalam ruang kuosen yang equivalen dengan norma kuosen, sehingga diperoleh pertaksamaan:

$$c_0 \| f - \langle f \rangle \|_{L^2} \leq \| f \|_{H^1} \leq c_1 \| f - \langle f \rangle \|_{L^2} , \tag{10}$$

untuk setiap fungsi f di $L^2(G)$ dan beberapa konstanta positif $c_1 \geq c_0 \geq 0$. Jadi, subruang $H^1(G)$ diidentifikasi dengan kuosen bagi $L^2(G)/\sim$ dilengkapi dengan norma H^1 yang diberikan pada (8).

Untuk sembarang fungsi dua variabel $f(x,y)$, dapat ditambahkan turunan berarah dalam variabel pertama, yaitu $\partial_y f(x,y) = f(y,y) - f(x,y)$. Oleh karena itu berdasarkan rumus hasil kali diperoleh

$$\begin{cases} \partial_y \left(f(x,y)g(x,y) \right) = \partial_y f(x,y)g(y,y) + f(x,y)\partial_y g(x,y) \\ \qquad = \partial_y f(x,y)g(x,y) + f(y,y)\partial_\partial g(x,y) = \\ \qquad = \partial_y f(x,y)g(x,y) + f(x,y)\partial_y g(x,y) + \partial_y f(x,y)\partial_y g(x,y). \end{cases} \tag{11}$$

Sangatlah mudah untuk memeriksa integral berikut dengan rumus integrasi demi bagian (*integration by parts*)

$$\begin{cases} \sum_x \sum_y \left[\partial_y f(x,y)g(x,y) + f(x,y)\partial_y g(x,y) \right] = \\ \qquad = \sum_x \sum_y \left[\partial_y \left(f(x,y)g(x,y) \right) - \partial_y f(x,y)\partial_y g(x,y) \right], \end{cases}$$

yang dapat direduksi menjadi

$$\sum_x \sum_y \left(\partial_y f(x,y) \right) g(x,y) = \sum_x \sum_y \partial_y \left(f(x,y)g(x,y) \right),$$

ketika $f(y,y) = 0$ untuk setiap *y*.

Misalkan *S* adalah subgraf terimbas dengan batas ∂S. Dengan memperhatikan ruang fungsi pada $\overline{S}$, satu-satunya perbedaan antara *S* dan *G* adalah batas sedangkan $\overline{S}$ dan *G* adalah sama. Seperti sebelumnya, definisikan

$$\int_{\overline{S}} f,\ \| f \|_{L^2(\overline{S})},\ L^2(\overline{S}),\ H^1\left(\overline{S}\right) = L^2\left(\overline{S}\right)/\sim,\ H_0^1\left(\overline{S}\right).$$

Suatu fungsi $f \in L^2(\overline{S})$ dapat dipandang sebagai fungsi di $L^2(G)$ yang mengurangi sebelah luar $\overline{S}$. Tetapi suatu fungsi di $H^1\left(\overline{S}\right)$ tidak dapat dipandang sebagai fungsi pada $H^1\left(G\right)$ yang menghilangkan bagian luar $\overline{S}$. Perbedaan serupa muncul dalam ruang Sobolev umum. Hal ini berdasarkan pada kontribusi dari sisi antara vertek ∂S dan vertek di luar $\overline{S}$. Misalkan $H_0^1\left(\overline{S}\right)$ adalah ruang fungsi pada *G* dengan menghilangkan bagian luar *S* dilengkapi dengan seminorma H^1. Sebagaimana dalam Lema 1, dapat diperiksa bahwa seminorma adalah suatu norma dan secara eksplisit

$$\| f \|^2_{H_0^1(S)} = \sum_{x\in \overline{S}} \sum_{y \in \overline{S}, y\sim x} \left(\partial_y f(x) \right)^2 \tag{13}$$

Secara khusus, kita dapat mengabaikan *f* di $\overline{S}$ atau di G dengan memperluas sebelah luar $\overline{S}$ bernilai 0. Analog ini lengkap dengan ruang Sobolev umum H_0^1. H^1 dapat dipandang sebagai suatu kuosen bagi (tiap kelas ekuivalen disajikan oleh elemen di L^2 dengan rataan nol). Sementara H_0^1 dengan batas tak kosong ∂S adalah subruang dari $L^2(\overline{S})$.

3. MASALAH DIRICHLET

Pada bagian ini, pembahasan difokuskan pada graf terimbas S dari graf terhubung tak berarah G dengan bobot ϖ yang dipadankan pada setiap sisi di *G*. Fungsi ϖ di $G\times G$ memiliki sifat

$$\begin{cases} \varpi(x,y) = \varpi(y,x) \geq 0, \\ \varpi(x,y) > 0 \Leftrightarrow x \sim y. \end{cases} \tag{14}$$

Batas ∂S diasumsikan kosong sehingga $S \neq G$.

Diberikan suatu fungsi $f : S \to R$. Selanjutnya, kita pecahkan masalah Dirichlet berikut. Tentukan fungsi *u* sedemikian sehingga :

$$\begin{cases} Au(x) = f(x), & \forall x \in S, \\ u(x) = 0, & \forall x \in \partial S. \end{cases} \tag{15}$$

Secara equivalen, ini merupakan solusi dari masalah variasional

$$\begin{cases} \text{Tentukan } u \text{ dalam } H_0^1 \text{ sedemikian sehingga} \\ a_{\bar{S}}\left(u,v\right) = \left(f,v\right), \qquad \forall v \in H_0^1(S). \end{cases} \tag{16}$$

Karena $a(u,v) = a_{\bar{S}}(u,v)$ untuk sembarang u dan v sedemikian sehingga u dan v milik $H_0^1(S)$ dan tidak terdapat pada $G \setminus S$, $a_{\bar{S}}(u,v)$ boleh digantikan oleh $a(u,v)$ dalam formulasi masalah variasional di atas.

Ruang $H_0^1(S)$ memiliki dimensi $|S|$ yaitu jumlah vertek S. Operator A adalah *self adjoint* dan definit positif. Kita dapat memandang sistem nilai eigennya yaitu μ_j dan vektor eigennya yaitu Φ_j dengan $j = 1,...|S|$. Oleh karena itu solusi (15) diberikan oleh

$$u(x) = \sum_{j=1}^{|S|} \frac{1}{\mu_j} \Phi_j(x) \sum_{\{y \in S\}} \Phi_j(y) f(y), \forall x \in S, \tag{17}$$

yaitu dalam bentuk fungsi Green.
Kita beralih ke masalah Dirichlet nonhomogen dengan menyatakan

$$\begin{cases} Au(x) = 0, & \forall x \in S, \\ u(x) = g(x), & \forall x \in \partial S, \end{cases} \tag{18}$$

dan $g : \partial S \to R$ adalah fungsi yang telah diberikan.

Masalah Dirichlet nonhomogen tersebut dapat direduksi ke dalam masalah Dirichlet homogen sebagai berikut.
Definisikan operator

$$Bg(x) = \sum_{\{y \in \partial S\}} \varpi(x,y) g(y), \quad \forall x \in S. \tag{19}$$

Perhatikan masalah Dirichlet homogen

$$\begin{cases} A\tilde{u}(x) = Bg(x), & \forall x \in S, \\ \tilde{u}(x) = 0, & \forall x \in \partial S. \end{cases} \tag{20}$$

Selanjutnya, kita nyatakan dalam lema berikut.

Lema 2
Sifat berikut dipenuhi untuk setiap *x* di *S*.

$$u(x) = \tilde{u}(x).$$

Bukti: Tulis $w = u - \tilde{u}$ lalu periksa w yang memenuhi

$$\begin{cases} Aw(x) = -Bg(x), & \forall x \in S, \\ w(x) = g(x), & \forall x \in \partial S. \end{cases}$$

Perhatikan, untuk sembarang f solusi masalah Dirichlet dinyatakan sebagai

$$\begin{cases} Av(x) = f(x), & \forall x \in S, \\ v(x) = 0, & \forall x \in \partial S. \end{cases}$$

Kemudian gunakan Rumus Green (3.14) untuk menuliskan

$$\int_S Awv - \int_S Avw + \int_{\partial S} \frac{\partial w}{\partial \upsilon_A} v - \int_{\partial S} \frac{\partial v}{\partial \upsilon_A} w = 0 .$$

Sehingga

$$-\int_S Bgv - \int_S fw + \int_{\partial S} \frac{\partial v}{\partial \upsilon_A} g = 0 ,$$

dan perhatikan bahwa bentuk pertama dan bentuk ketiga saling membatalkan.
Sehingga diperoleh

$$\int_S fw = 0 .$$

Karena f adalah sembarang, kita simpulkan $w = 0$ di S.

Teorema 1: Misalkan S adalah subgraf terimbas dari graf terhubung tak berarah G dengan bobot berdasarkan (14). Asumsikan bahwa batas ∂S adalah tak kosong dan perhatikan dua fungsi $f : S \to R$ dan $g : \partial S \to R$. Maka masalah Dirichlet

$$\begin{cases} Au(x) = f(x), & \forall x \in S, \\ u(x) = g(x), & \forall x \in \partial S, \end{cases} \tag{21}$$

memiliki satu dan hanya satu solusi, yang secara eksplisit diberikan menggunakan fungsi Green, yaitu

$$u(x) = \int_G G(x,y)\left[f(y) + Bg(y) \right], \quad \forall x \in S, \tag{22}$$

dengan Bg didefinisikan oleh (3.27) dan

$$G(x,y) = \sum_{j=1}^{|S|} \frac{1}{\mu_j} \Phi_j(x)\Phi_j(y) \quad \forall x, y \in S, \tag{23}$$

merupakan fungsi Green yang berkaitan dengan (22).
Dari sini, prinsip maksimum diskret dipenuhi, yaitu jika $f \geq 0$ dan $g \geq 0$ maka $u \geq 0$.

Bukti: Karena $g \geq 0$ berimplikasi $Bg \geq 0$, kita hanya perlu untuk memeriksa bentuk variasional (16) sehingga disimpulkan $v = u^-$ di $H_0^1(S)$. Selanjutnya

$$a\left(u,u^-\right) = \left(f,u^-\right) \geq 0,$$

karena $f \geq 0$.

Di sisi lain, dengan pengertian sifat $a\left(u,u^-\right) \leq 0,\ a\left(u,u^+\right) \geq 0,\ \forall u, v \in H^1(G),$

diperoleh $a\left(u,u^-\right) = 0$, sehingga:

$$\left(u(y) - u(x)\right)\left(u^-(y) - u^-(x)\right) = 0 \text{ jika } x \sim y .$$

Misalkan suatu vertek x_0 dalam S sedemikian sehingga $u\left(x_0\right) < 0$, maka

$$u\left(y\right)=u\left(x_0\right)<0 \quad \forall y\sim x_0 .$$

Akan tetapi, jika $z\in\partial S$ maka terdapat suatu lintasan yang menghubungkan x_0 ke z. Seharusnya $u\left(z\right)=u\left(x_0\right)$, tetapi $u(z)=0$ sehingga terdapat suatu kontradiksi dan diperoleh

$$u(x)=\int_S G(x,y)f(y)+\int_S \frac{\partial G(x,y)}{\partial \upsilon_y}g(y), \quad \forall x\in S,$$

dengan turunan konormal yang diambil berturut-turut terhadap variabel kedua y dari fungsi Green. Dengan demikian, prinsip maksimum menunjukan bahwa $G(x,y)\geq 0$, seperti halnya derivatif konormal dalam y.

4. IDENTIFIKASI

Kelayakan pendekatan variasional kita cukup bagus bila dibandingkan dengan masalah identifikasi yang dipandang oleh Berenstein dan Chung [2]. Secara singkat, solusi masalah Dirichlet nonhomogen

$$\begin{cases} Au(x)=f(x), & \forall x\in S,\\ u(x)=g(x), & \forall x\in \partial S, \end{cases} \tag{24}$$

adalah suatu solusi tunggal dari masalah minimisasi berikut.
Minimalkan :

$$\begin{cases} J(v)=a\overline{S}(v,v)-2\int_S fv, \text{ dengan syarat}\\ \left\{v\in L^2\left(\overline{S}\right): \text{ sedemikian sehingga } v(x)=g(x),\ \forall x\in\partial S\right\}, \end{cases} \tag{25}$$

dengan f dan g adalah fungsi yang telah diberikan.

Perhatikan dua bobot $\varpi_1(x,y)$ dan $\varpi_2(x,y)$ sedemikian sehingga

$$\varpi_1(x,y)\leq\varpi_2(x,y), \quad \forall x,y\in\overline{S} \tag{26}$$

dengan operator yang berkorespondensi terhadap bobot-bobotnya dinotasikan oleh A_1, dan A_2. Misalkan u_1, u_2 menjadi dua fungsi pada $\overline{S}$, sedemikian sehingga:

$$\begin{cases} A_1u_1(x)=A_2u_2(x)=0, & \forall x\in S\\ u_1(x)=u_2(x), & \forall x\in\partial S\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \upsilon_{A_1}}(x)=\dfrac{\partial u_2}{\partial \upsilon_{A_2}}(x), & \forall x\in\partial S, \end{cases} \tag{27}$$

dapat kita nyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2: Kita asumsikan (26) dan (27) dengan S adalah subgraf terimbas dari graf terhubung tak berarah G dengan batas tak kosong ∂S. Maka dimiliki :

$$u_1(x)=u_2(x), \quad \forall x\in\overline{S} . \tag{28}$$

Lebih lanjut, jika $u(x)$ menotasikan nilai biasa dari $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, diperoleh

$$\varpi_1(x,y)=\varpi_2(x,y), \quad \forall x,y\in\overline{S} \text{ sedemikian sehingga } u(x)\neq u(y) \tag{29}$$

Bukti: Fungsional (25) berkorespondensi secara berturut-turut dengan bobot ϖ_1 dan ϖ_2 yang dinotasikan oleh $J_1(v)$ dan $J_2(v)$.

Karena $f = 0$, diperoleh

$$J_1(v) = a_{\{\bar{S},1\}}(v,v) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\bar{S}}\sum_{y\in\bar{S}}\varpi_1(x,y)\big(v(y)-v(x)\big)^2,$$

$$J_2(v) = a_{\{\bar{S},2\}}(v,v) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\bar{S}}\sum_{y\in\bar{S}}\varpi_2(x,y)\big(v(y)-v(x)\big)^2.$$

Karena

$$J_1(v) = \int_S A_1 vv + \int_{\partial S}\frac{\partial v}{\partial \upsilon_{A_1}}v,$$

asumsi (27) menghasilkan $J_1(u_1) = J_2(u_2)$.
Dari (26), diperoleh

$$J_2(u_2) \geq J_1(u_2),$$

sehingga (28) dipenuhi. Kita miliki juga

$$\sum_{x\in\bar{S}}\sum_{y\in\bar{S}}\big(\varpi_1(x,y)-\varpi_2(x,y)\big)\big(u(y)-u(x)\big)^2 = 0.$$

Karena semua bentuk adalah negatif, persamamaan-persamaan ini hilang sehingga diperoleh (29).

Catatan 1: Dalam Berenstein dan Chung [2] , ada tambahan asumsi berikut

$$\varpi_1(x,y) = \varpi_2(x,y), \quad \forall x\in\partial S, \quad \forall y\in\partial\dot{S}. \tag{30}$$

Fakta ini berdasarkan pada beda dari definisi turunan normal yang dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial_\varpi n}(x) = \sum_{\{y\in S\}}\frac{u(x)-u(y)}{d'_\varpi x},$$

dengan

$$d'_\varpi x = \sum_{\{y\in S\}}\varpi\big(x,y\big), \quad \forall x\in\partial S.$$

Pada dasarnya asumsi tambahan (30) berimplikasi bahwa

$$d'_{\varpi_1} x = d'_{\varpi_2} x, \quad \forall x\in\partial S.$$

Sehingga himpunan asumsi-asumsi bernilai serupa dan penyajian yang dihasilkan lebih sintetik.

Catatan 2: Fakta dalam asumsi pertama (27) yaitu ruas kanan adalah nol merupakan sifat yang mendasar. Hasil tidak mencukupi meskipun untuk sebuah ruas kanan yang identik.

Catatan 3: Jika asumsi tambahan (30) dari Catatan 1 dibuat dengan tambahan nilai biasa pada batas adalah *strickly* positif dan

$$\int_S u_1(x)d_{\varpi_1}x = \int_S u_2(x)d_{\varpi_2}x,$$

maka

$$\varpi_1(x,y) = \varpi_2(x,y).$$

Sesungguhnya, kita memiliki $u_1(x) = u_2(x) = u(x)$ untuk setiap *x* di *S* dan lebih lanjut $u(x) > 0$ untuk setiap *x* di *S*. Hasil yang diinginkan selanjutnya dapat diperoleh pada Berenstein dan Chung[2], Teorema 2.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian dibiayai hibah penelitian Program Hibah Kompetisi A2, Departemen Matematika, tahun anggaran 2007.

DAFTAR PUSTAKA

[1] **A. Bensoussan & J.L Menaldi**, 2005., *Difference Equation on Weighted Graphs*, *J. Conv. An.*, Vol. 12(1), 13-44.

[2] **S.Y. Chung & C. A. Berenstein**, 2005, *ω-Harmonic Function and Inverse Conductivity Problem on Network.*, SIAM J. App.Math., 1200 - 1226

[3] **F. Chung & S.T. Yau**. *Discrete Green's Function*, J. Comb. Th., Series A 91 (2000), 191-214.

[4] **J.L. Lions**. 1961. *Equations differentielles operationnelles et Problemes aux limites*. Springer-Verlag, Berlin.

[5] **Young, N**. 1998. *An Introduction to Hilbert Space*.Cambridge University Press.UK..