

# BIPLOT DAN IMPLEMENTASINYA DENGAN PEMROGRAMAN FUNSIONAL *MATHEMATICA*

KUTHA ARDANA, N.K., SISWADI

Departemen Matematika,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Institut Pertanian Bogor  
Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga, Bogor, 16680 Indonesia

**Abstrak.** Teknik pemrograman fungsional *mathematica* digunakan untuk mengimplementasikan metode (Gabriel) biplot. Hasil utama yang diperoleh berupa suatu perintah/fungsi `biplot[data,  $\alpha$ , opsi]`. Argumen pertama: data berupa data mentah dalam bentuk matriks dan peubah ganda yang terdiri dari  $n$  obyek dan  $p$  peubah. Argumen  $\alpha$  berupa koefisien  $\alpha \in [0,1]$  pada penguraian nilai singular matriks data  $X = UA V' = (U \Lambda^\alpha)(\Lambda^{1-\alpha} V') = GH'$ . Nilai  $\alpha = 0$  menghasilkan biplot korelasi,  $\alpha = 1$  menghasilkan biplot jarak Euclid,  $\alpha = 0.5$  menghasilkan biplot antara. Kombinasi  $\alpha_1 = 1$  untuk  $G$  dan  $\alpha_2 = 0$  untuk  $H$  menghasilkan biplot kombinasi. Argumen opsi berupa tambahan untuk label titik-titik obyek dan vektor peubah. Perintah biplot akan menghasilkan sekaligus plot obyek yang dinyatakan dengan tebaran titik koordinatnya, dan plot vektor peubah yang dinyatakan dengan garis. Ilustrasi kasus nyata berupa biplot pemanfaatan dan pengembangan Teknologi Informasi (TI) pada beberapa negara diberikan untuk melihat tampilan biplot yang dihasilkan beserta interpretasinya.

**Kata Kunci:** biplot, matriks data, penguraian nilai singular, jarak Euclid, jarak Mahalanobis, pemrograman fungsional.

## 1. METODE BILOT

Metode biplot merupakan salah satu teknik eksplorasi data peubah ganda yang dapat memvisualisasikan baris dan kolom suatu matriks data ke dalam suatu ruang berdimensi rendah (Hardle dan Simar, 2003). Biplot berupa suatu tampilan grafik (kebanyakan 2 dimensi) dengan menumpangtindihkan vektor-vektor baris yang mewakili obyek dengan vektor-vektor kolom yang mewakili peubah. Dengan biplot dimungkinkan untuk memperoleh informasi tentang: i) kedekatan antar obyek, ii) keragaman dan korelasi antar peubah, maupun iii) keterkaitan antara obyek dan peubah.

Meski biplot merupakan alat peraga data peubah ganda yang praktis, implementasi metode ini belum banyak dikembangkan. Lipkovich dan Smith (2002) menerapkan metode ini dalam kaitan dengan analisis statistika peubah ganda seperti Analisis Komponen Utama, Analisis Korespondensi, Penskalaan Multidimensional. Tulisan ini membahas implementasi metode (Gabriel) biplot untuk berbagai kemungkinan koefisien  $\alpha$  dengan menggunakan teknik pemrograman fungsional *Mathematica*.

## 2. LANDASAN TEORI

Misalkan  $\mathbf{X}^*(n \times p)$  merupakan matriks data peubah ganda yang terdiri dari  $n$  obyek (sampel pengamatan) untuk masing-masing  $p$  peubah:

$$\mathbf{X}^*_{n \times p} = \begin{pmatrix} x^*_{11} & x^*_{12} & \cdots & x^*_{1p} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & \cdots & x^*_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^*_{n1} & x^*_{n2} & \cdots & x^*_{np} \end{pmatrix}$$

Untuk mempermudah analisis selanjutnya, terhadap matriks  $\mathbf{X}^*$  lakukan transformasi berupa koreksi terhadap nilai rataannya sehingga diperoleh matriks  $\mathbf{X}(n \times p)$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n \times p} &= \mathbf{X}^*_{n \times p} - \frac{1}{n} (\mathbf{1}_n \mathbf{1}'_n \mathbf{X}_p) \\ &= \begin{pmatrix} x^*_{11} & x^*_{12} & \cdots & x^*_{1p} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & \cdots & x^*_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^*_{n1} & x^*_{n2} & \cdots & x^*_{np} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_p \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

dimana  $\mathbf{1}(n \times 1)$  adalah vektor yang semua unsurnya bernilai 1, dan  $\bar{x}_j$  adalah nilai rata-rata peubah ke- $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ .

Matriks ragam-koragam  $\mathbf{S}$ , dan matriks korelasi  $\mathbf{R}$ , bagi  $\mathbf{X}$  adalah

$$\begin{aligned} {}_p \mathbf{S}_p &= \frac{1}{n-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} \\ &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 {}_p R_p &= \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{S} \mathbf{D}^{-1/2} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3}
 \end{aligned}$$

dimana  $\mathbf{D}^{-1/2} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{s_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{s_{22}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{s_{pp}}}\right)$  adalah matriks diagonal dengan unsur diagonal utama  $1/\sqrt{s_{ii}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  (Johnson dan Wichern, 2002).

Mudah ditunjukkan bahwa unsur  $r_{ij}$  pada (3) juga merupakan kosinus sudut  $\theta$  antara peubah  $x_i$  dan  $x_j$ :

$$\cos(\theta) = r_{ij} \tag{4}$$

Jarak Euclid antara  $x_i$  dan  $x_j$ ,  $d(x_i, x_j)$ , didefinisikan sebagai

$$d^2(x_i, x_j) = (x_i - x_j)'(x_i - x_j) \tag{5}$$

Jarak ini memperlakukan semua peubah memiliki ragam yang sama dan tak berkorelasi. Ukuran jarak lainnya yang memberikan bobot yang relatif kecil pada peubah dengan keragaman besar, dan peubah-peubah yang berkorelasi tinggi adalah jarak Mahalanobis yang didefinisikan sebagai

$$\delta^2(x_i, x_j) = (x_i - x_j)' \mathbf{S}^{-1}(x_i - x_j) \tag{6}$$

dengan anggapan bahwa pangkat matriks  $\mathbf{X}(n \times p)$  adalah  $p$ .

Berdasarkan teorema penguraian nilai singular (*singular value decomposition*, SVD), matriks  $\mathbf{X}(n \times p)$  dengan pangkat  $r \leq p \leq n$  dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}' \tag{7}$$

dengan  $\mathbf{U}(n \times r)$  dan  $\mathbf{V}(p \times r)$  merupakan matriks ortonormal kolom ( $\mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{V}'\mathbf{V} = \mathbf{I}_r$ ) dan  $\mathbf{\Lambda}(r \times r) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_r})$  yang bersifat  $\sqrt{\lambda_1} \geq \sqrt{\lambda_2} \geq \dots \geq \sqrt{\lambda_r}$ . Unsur  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  adalah nilai eigen  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ , dan  $\sqrt{\lambda_i}$  disebut nilai singular (Mardia et al., 1979).

Definisikan  $\mathbf{\Lambda}^\alpha = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1^\alpha}, \sqrt{\lambda_2^\alpha}, \dots, \sqrt{\lambda_r^\alpha})$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , dan misalkan  $\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^\alpha$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1-\alpha}$  maka (1) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}' \\
 &= (\mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^\alpha)(\mathbf{\Lambda}^{1-\alpha} \mathbf{V}') \\
 &= \mathbf{G} \mathbf{H}' \tag{8}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian unsur ke-( $i, j$ ) dari matriks data  $\mathbf{X}(n \times p)$  dapat dinyatakan sebagai

$$x_{ij} = \mathbf{g}'_i \mathbf{h}_j \quad (9)$$

dengan  $\mathbf{g}'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dan  $\mathbf{h}'_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  berturut-turut adalah vektor-vektor baris matriks  $\mathbf{G}$  dan  $\mathbf{H}$  masing-masing dengan  $r$  unsur (Jolliffe, 1986). Di sini,  $n$  baris dari  $\mathbf{G}$  berkaitan dengan baris-baris dari  $\mathbf{X}$ , dan  $p$  baris dari  $\mathbf{H}$  berhubungan dengan kolom-kolom dari matriks  $\mathbf{X}$ .

Persamaan (9) juga bermakna bahwa nilai  $x_{ij}$  diwakili oleh proyeksi  $\mathbf{g}_i$  pada  $\mathbf{h}_j$ . Nilai  $x_{ij}$  bertanda positif (nilai pengamatan semula,  $x_{ij}^*$  > nilai rata-rata  $\bar{x}_j^*$ ) bila sudut antara vektor  $\mathbf{g}_i$  dan  $\mathbf{h}_j$ ,  $\theta \in [0, \pi/2)$ , dan bertanda negatif (nilai  $x_{ij}^* <$  nilai rata-rata  $\bar{x}_j^*$ ) bila  $\theta \in (\pi/2, \pi]$ . Nilai  $x_{ij}$  mendekati nol (nilai pengamatan semula,  $x_{ij}^*$  mendekati rata-rata  $\bar{x}_j^*$ ) bila  $\mathbf{g}_i$  dan  $\mathbf{h}_j$  saling ortogonal. Jadi, posisi relatif titik-titik  $\mathbf{g}_i$  dan  $\mathbf{h}_j$  pada biplot akan memberikan informasi tentang besaran obyek ke- $i$  pada peubah ke- $j$ .

Untuk  $r = 2$ ,  $x_{ij} = \mathbf{g}'_i \mathbf{h}_j$  sehingga matriks data  $\mathbf{X}$  dapat digambarkan secara pasti pada ruang berdimensi dua. Bila  $r > 2$  dan matriks data  $\mathbf{X}$  ingin digambarkan pada ruang berdimensi  $k < r$ , dapat dilakukan suatu pendekatan terbaik dengan suatu matriks berpangkat  $k$ . Dalam hal ini,  $\mathbf{X}$  pada persamaan (7) didekati dengan

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{G} \mathbf{H}' = (\mathbf{U}_{(k)} \Lambda_{(k)}^\alpha) (\Lambda_{(k)}^{1-\alpha} \mathbf{V}'_{(k)}) \quad (10)$$

Pada biplot, umumnya diambil  $k = 2$  sehingga koordinat-koordinat  $\mathbf{G}$  dan  $\mathbf{H}$  dapat diplot pada ruang berdimensi dua (Lipkovich dan Smith, 2002).

Meskipun koefisien  $\alpha$  dapat mengambil nilai pada kisaran  $[0, 1]$ , nilai  $\alpha = 0$  dan  $\alpha = 1$  memiliki beberapa implikasi penting sebagai berikut:

■  $\alpha = 0$  (biplot korelasi)

Bila pada (8) dipilih  $\alpha = 0$ , maka  $\mathbf{G} = \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{V} \Lambda$ . Akibatnya:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' \mathbf{X} &= (\mathbf{G} \mathbf{H}')' (\mathbf{G} \mathbf{H}') \\ &= \mathbf{H} \mathbf{G}' \mathbf{G} \mathbf{H}' \\ &= \mathbf{H} \mathbf{U}' \mathbf{U} \mathbf{H}' \\ &= \mathbf{H} \mathbf{I}_r \mathbf{H}' \\ &= (n-1) \mathbf{S} \end{aligned} \quad (11)$$

Ini berarti hasil kali  $\mathbf{h}'_i \mathbf{h}_j = (n-1) s_{ij}$ ; karena itu panjang vektor  $\mathbf{h}_j$  pada biplot menggambarkan keragaman  $x_j$ . Selain itu, berdasarkan (4), nilai kosinus sudut antara  $\mathbf{h}_i$  dan  $\mathbf{h}_j$  merepresentasikan korelasi antara peubah  $x_i$  dan  $x_j$ . Hal lainnya, dari vektor-vektor  $\mathbf{g}$ , dapat ditunjukkan bahwa jarak Euclid antara  $\mathbf{g}_i$  dan  $\mathbf{g}_j$  pada biplot sebanding dengan jarak Mahalanobis antara vektor  $\mathbf{x}_i$  dan  $\mathbf{x}_j$  (Jolliffe, 1986). Gabriel (1971) menggunakan ukuran kesesuaian pendekatan biplot pada ruang berdimensi dua:

$$\rho = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r} \quad (12)$$

### 1 (biplot jarak Euklid)

= 1 pada (8) maka  $\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{V}$ . Akibatnya  $\mathbf{X} \mathbf{X}' = \mathbf{G} \mathbf{G}'$ . Pada kasus jarak Euclid antara  $\mathbf{g}_i$  dan  $\mathbf{g}_j$  pada biplot juga menggambarkan jarak Euclid  $\mathbf{x}_i$  dan  $\mathbf{x}_j$ . Koordinat-koordinat  $\mathbf{g}_i$  dan  $\mathbf{h}_j$  yang dihasilkan masing-masing akan skor dan koefisien dua komponen pertama pada analisis komponen (Jolliffe, 1986).

### 1 untuk obyek, $\alpha = 0$ untuk peubah (biplot kombinasi)

1 mengambil  $\alpha = 1$  untuk  $\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^\alpha = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}$  dan  $\alpha = 0$  untuk  $\mathbf{\Lambda}^{1-\alpha} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}$  pada (8) akan diperoleh biplot dengan koordinat  $\mathbf{g}_i$  merupakan komponen utama, dan  $\mathbf{h}_j$  memberikan gambaran keragaman peubah ke- $j$ . saja di sini tidak berlaku kaitan antara posisi relatif titik-titik  $\mathbf{g}_i$  dan  $\mathbf{h}_j$  biplot dengan informasi tentang besaran obyek ke- $i$  pada peubah ke- $j$  ( $\mathbf{g}_i' \mathbf{h}_j$ ).

### 0.5 (biplot antara)

1 mengambil  $\alpha = 0.5$  pada (8), interpretasi seperti pada biplot korelasi dan jarak tidak berlaku, namun posisi relatif  $\mathbf{g}_i$  dan  $\mathbf{g}_j$  pada biplot masih mencerminkan informasi tentang besaran obyek ke- $i$  pada peubah ke- $j$  ( $x_{ij} = \mathbf{g}_i' \mathbf{h}_j$ ). biplot yang dihasilkan berada di antara biplot korelasi dan jarak karena bobot/skala yang seimbang antara koordinat-koordinat  $\mathbf{g}_i$  dan  $\mathbf{h}_j$  (Rich dan Smith, 2002).

## 3. IMPLEMENTASI DENGAN MATHEMATICA

*Mathematica* menyediakan berbagai tipe pemrograman, a.l. pemrograman prosedural dan fungsional. Namun tipe pemrograman fungsional dianggap yang paling populer karena akan menghasilkan program yang ringkas dengan waktu eksekusi yang lebih cepat (Wagner, 1996). Pemrograman fungsional pada *Mathematica* dilakukan dengan proses pemetaan fungsi terhadap suatu list (kumpulan ekspresi), dengan menggunakan fungsi-fungsi seperti Map, Apply, Nest, dan Point (Ardana, 2004).

*Mathematica* menyediakan fungsi SingularValueDecomposition[ $m$ ] yang menghasilkan penguraian nilai singular (PNS) matriks numerik  $m$  dengan menggunakan algoritma QR dengan rotasi Givens. SingularValueDecomposition[ $m, k$ ] menghasilkan PNS yang berkaitan dengan  $k$  nilai terbesar dari  $m$  ( $k = 2$  digunakan untuk biplot). Fungsi SVD2[ $m$ ] digunakan untuk memodifikasi fungsi SingularValueDecomposition[ $m$ ]

dengan penyesuaian tanda bagi vektor-vektor eigennya sehingga menghasilkan plot yang lebih mudah penginterpretasiannya. Plot yang dihasilkan berupa tebaran koordinat obyek yang ditumpangtindihkan dengan plot vektor peubah berupa garis lurus. Untuk penyesuaian tampilan baris matriks  $G$ , digunakan faktor penskalaan berupa pengganda  $\max\{\text{koordinat obyek}\}/\max\{\text{koordinat peubah}\}$ .

Fungsi yang dihasilkan memiliki sintaks

```
biplot[X*,  $\alpha$ , opsi]
```

$X^*$  adalah matriks data, argumen  $\alpha \in [0, 1]$ . Nilai  $\alpha = 0$  menghasilkan biplot korelasi,  $\alpha = 1$  (biplot jarak Euclid),  $\alpha = 0.5$  (biplot antara), dua nilai  $\alpha$ :  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$  menghasilkan biplot kombinasi. Argumen opsi menyediakan fasilitas untuk memberikan label bagi titik-titik obyek atau vektor-vektor peubah.

#### 4. CONTOH KASUS : BILOT TI

Berikut adalah perintah untuk mengimpor data World Bank 2005 tentang pemanfaatan dan pengembangan Teknologi Informasi berformat MS Excel:

```
it = Import["c:\seminar05\IT Data.xls", "XLS"];
```

Ada 7 indikator (peubah) yang diamati:

```
colLabel = Map[ToString, Rest[it[[1]]]]
```

```
{NEWSPP, RADIO, TV, COMP, INTERNET, %GDP-IT, IT/CAP}
```

NEWSPP : banyaknya pelanggan surat kabar per 1000 orang, RADIO: banyaknya pemilik radio per 1000 orang, TV: banyaknya pemilik TV per 1000 orang, COMP: banyaknya pemilik komputer per 1000 orang, INTERNET: banyaknya pengakses internet per 1000 orang, %GDP/IT: persentase GDP untuk TI, IT/CAP: besarnya pengeluaran untuk TI per kapita (\$). Hampir semua indikator menggunakan data tahun 2003 kecuali NEWSPP (2000) dan RADIO (1997 - 2003).

Berikut adalah 23 negara yang akan dianalisis dengan biplot. Ke-12 negara pertama adalah negara-negara Asia.

```
rowLabel = Map[ToString, Rest[it[[All, 1]]]]
```

```
Length[rowLabel]
```

```
{Bangladesh, China, Hongkong, India, Indonesia, Korea Rep,  
Malaysia, Pakistan, Saudi Arabia, Singapore, Sri Lanka,  
Thailand, Argentina, Australia, Brazil, Denmark, Germany,  
Kenya, New Zaeland, Senegal, South Africa, U Kingdom, USA}
```

23

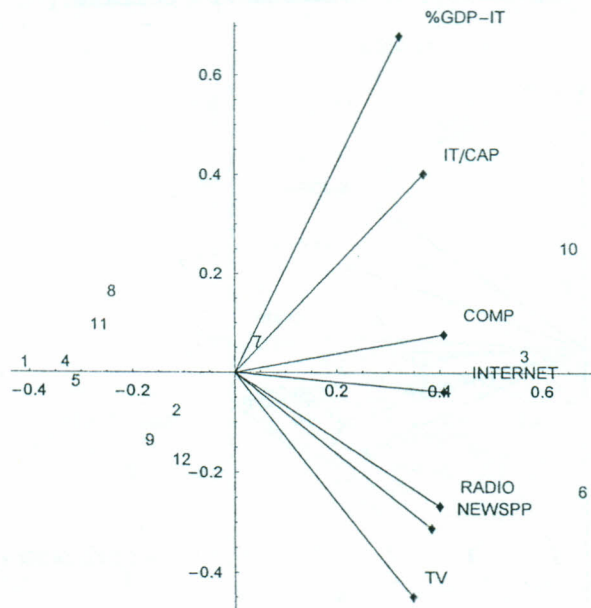
Data dibedakan atas data TI dunia (itWorld) dan data TI Asia (itAsia):

```
itWorld = Map[Take[#, -7] &, it] // Rest;
```

```
itAsia = Take[itWorld, 12];
```

Biplot jarak Euclid. Data dibakukan karena memiliki satuan yang berbeda:

biplot[Standardize[itAsia], 1, ColumnLabel → colLabel]

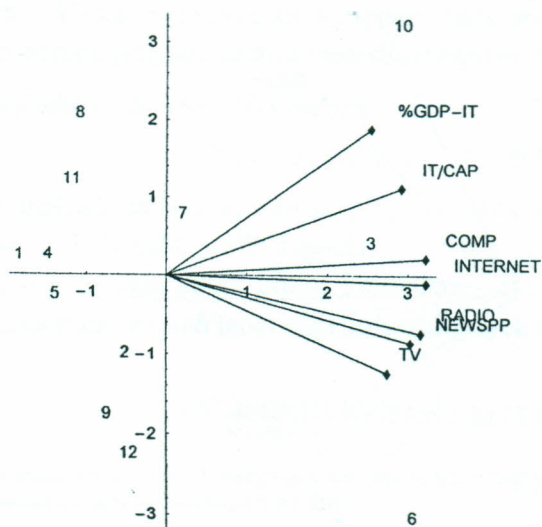


- Graphics -

Berdasarkan hasil tersebut: Hongkong (3), Korea (6), Singapore (10) memiliki nilai di atas rata-rata untuk masing-masing indikator. Negara lainnya (termasuk Indonesia, 5) mengelompok di kiri, secara umum memiliki nilai di bawah nilai rata-rata masing-masing indikator, kecuali nomor negara yang membentuk sudut lancip terhadap suatu peubah.

Biplot korelasi:

```
biplot[Standardize[itAsia], 0, ColumnLabel → colLabel]
```



- Graphics -

Semua indikator berkorelasi positif, karena vektor-vektornya membentuk sudut lancip satu dengan lainnya. Makin kecil sudut antara dua vektor, makin besar korelasinya.

Ukuran kesesuaian:

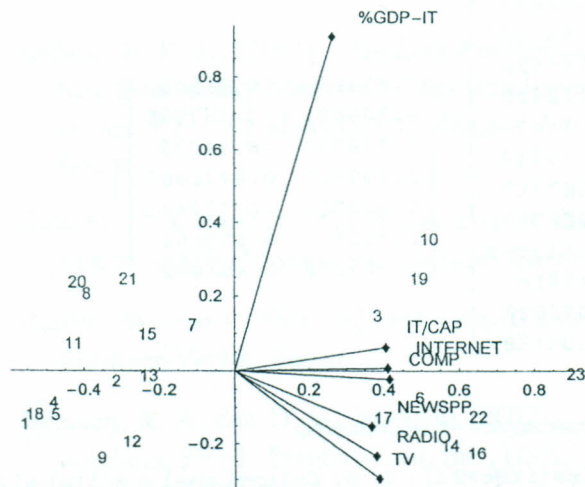
```
rho[Standardize[itAsia]]
```

0.910089

Biplot jarak Euclid untuk IT dunia:



```
biplot[Standardize[itWorld], 1, ColumnLabel → colLabel]
```



- Graphics -

Perhatikan posisi 23 (USA) yang terletak paling kanan menunjukkan prestasi terbaik secara menyeluruh dalam pengembangan TI. Hal ini dapat ditelusuri dari vektor eigen pertama matriks **V** yang semuanya bernilai positif:

```
SVD2[Standardize[itWorld]][[3]] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0.365939 & -0.151823 \\ 0.378505 & -0.234599 \\ 0.386258 & -0.297491 \\ 0.414658 & -0.0217482 \\ 0.410213 & 0.00813502 \\ 0.262863 & 0.910426 \\ 0.405357 & 0.0632202 \end{pmatrix}$$

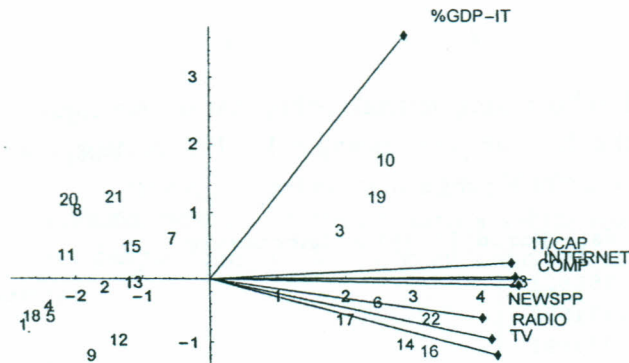
Berikut adalah hasil perhitungan matriks **G** dan **H** untuk  $\alpha = 1$ :

```
Map[MatrixForm, GH[Standardize[itAsia], 1]]
```

-2.43893	0.118493	,	0.383656	-0.311432
-0.682723	-0.457027		0.399953	-0.267625
3.36605	0.195436		0.346772	-0.44929
-1.96362	0.122622		0.407962	0.0771087
-1.8457	-0.114381		0.408012	-0.038541
4.04126	-1.41716		0.321543	0.678664
0.265993	0.367717		0.369186	0.401882
-1.43371	0.96855			
-0.99303	-0.813769			
3.88138	1.49818			
-1.57615	0.572923			
-0.620818	-1.04158			

Biplot kombinasi ( $\alpha = 1$  untuk obyek,  $\alpha = 0$  untuk peubah):

```
biplot[Standardize[itWorld], 1, 0, ColumnLabel -> colLabel]
```



- Graphics -

## 5. SIMPULAN DAN SARAN

Metode (Gabriel) biplot telah diimplementasikan menggunakan teknik pemrograman fungsional *Mathematica*. Output fungsi `biplot[data,  $\alpha$ , opsi]` terhadap data indikator TI menghasilkan sejumlah tampilan obyek dan peubah untuk berbagai kemungkinan nilai  $\alpha$ . Implementasi metode ini masih dapat diperluas sebagai alat visualisasi dalam berbagai teknik pereduksian dimensi data peubah ganda.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ardana, N. K. K. (2004). *Panduan Penggunaan Mathematica*. Modul Pelatihan Pemodelan Matematik dan Implementasinya pada Komputer bagi Dosen PT. PKSDM-DIKTI dengan Jurusan Matematika FMIPA-IPB. Bogor.
- Gabriel, K. R. (1971). The biplot-graphic display of matrices with application to principal component analysis. *Biometrika* **58**, 453-467.
- Hardle, W. dan L. Simar (2003). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Springer-Verlag, Berlin.
- Johnson, R. A. dan D. W. Wichern (2002). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 5<sup>th</sup> ed. Prentice-Hall, Inc., USA.
- Jolliffe, I.T. (1986). *Principal Component Analysis*. Springer-Verlag, New-York.
- Lipkovich, I. and E. P. Smith (2002). Biplot and Singular Value Decomposition Macros for Excel<sup>®</sup>. *Journal of Statistical Software* **7(5)**; 1-15.
- Mardia, K. V., J. T. Kent, dan J. M. Bibby (1979). *Multivariate Analysis*. Academic Press, London.
- Wagner, D. B. (1996). *Power Programming with Mathematica. The Kernel*. McGraw-Hill, USA.
- World Bank. (2005). *World Development Indicators 2005*: <http://www.worldbank.org/data/wdi2005/>