PEMETAAN DIRICHLET KE NEUMANN UNTUK RANGKAIAN RESISTOR BERBENTUK SEGI

AGAH D. GARNADI

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Raya Pajajaran, Kampus IPB Baranang Siang, Bogor, Indonesia

Abstract. Dalam tulisan ini dibahas representasi peta Dirichlet ke Neumann dari sebuah rangkaian resistor berbentuk segi. Permasalahan ini berasal dari analogi diskret dari Tomografi Elektrik. Secara tidak langsung, analogi diskret terkait dengan bentuk hampiran elemen hingga campuran dari permasalahan Tomografi Elektrik.

Keywords: Resistor Networks, Discrete Element

1. Pendahuluan

Tomografi Resistensi Elektrik (*Electrical Resistance Tomography* ERT) merupakan salah satu teknologi pemetaan tak merusak yang menggambarkan distribusi bahan yang di batasi alat dengan cara melakukan pengukuran listrik di batas. Berdasarkan data pengukuran, algoritma rekonstruksi digunakan untuk mengetahui distribusi konduktivitas (atau resistensi/hambatan) bahan dalam bentuk citra.

Rentang pemakaian ERT sebagai teknik citra tak merusak, cukuplah luas. Dalam bidang biomedis, teknologi ini digunakan sebagai alat monitor klinis dengan kemungkinan aplikasi yang cukup luas[14]. Di bidang kebumian, aplikasi ERT cukup handal sebagai metoda yang efektif sebagai alat tak merusak untuk monitoring lingkungan bawah permukaan tanah [15]. Lebih jauh lagi, dalam industri proses, ERT digunakan sebagai instrumen untuk memonitor peralatan proses yang berbentuk silindris [16].

Meski pun dapat dikatakan sebagai alat yang cukup menjanjikan dan 'murah', untuk menghasilkan distribusi sebagai gambar berdasarkan

---

DIBIAYAI OLEH PROYEK PENINGKATAN IPB, KONTRAK NO 36/K13.18.1/SPHP/2004

data yang dikumpulkan melalui algoritma rekonstruksi citra yang andal dan kekar merupakan hal yang tidak mudah.

Metoda Elemen Hingga [11] pada umumnya dijadikan metoda diskretisasi model alat ERT[9], sedangkan varian MEH yang dikenal sebagai metoda campuran, digunakan di [6]. Pada [13], berdasarkan MEH dapat ditunjukan analoginya dengan rangkaian listrik yang setiap elemennya berupa resistor. Sementara itu, model analogi mempergunakan rangkaian resistor diberikan oleh [5], [10][7], untuk potongan penampang sebagai masalah 2 dimensi, dan [3] untuk masalah 3 dimensi.

2. Rangkaian Resistor

Misalkan, $\Gamma = (\mathcal{N}, \mathcal{B})$, graph berarah (*digraph*) yang terkait dengan rangkaian listrik, tanpa kehilangan keumuman, anggap Γ graph datar (*planar digraph*). Sebut $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_E\}$ menyatakan himpunan cabang berarah (*directed branches/edges*), berkait dengan himpunan resistor, atau aliran arus pada cabang,
$\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \cdots, n_I, n_{I+1}, n_{I+2}, \cdots, n_{I+\beta}\}$ menyatakan himpunan simpul (*nodes*), berkait dengan himpunan tegangan, I menyatakan jumlah simpul dalam, dan β menyatakan jumlah simpul di batas, dengan :$n_N = I + \beta$. Terkait dengan rangkaian tersebut, misalkan $A_0 \in (\{-1, 0, 1\})^{E \times n_N}$ merupakan matriks *insidensi* dari topologi rangkaian listrik[1].

Dengan menerapkan hukum-hukum listrik pada cabang dan simpul, serta mengingat bahwa konduktansi sebuah resistor adalah kebalikan nilai resistensinya, akan kita peroleh hasil sebagai berikut ini.

Dengan menggunakan Hukum Ohm di cabang, berlaku :

$$\begin{aligned} \epsilon_j + (\Delta V)_j &= i_j R_j; \\ (v_j - v_l) &= i_j R_j; j = 1, \cdots, E \qquad \text{(TANPA sumber tegangan)} \\ i_j R_j - (v_j - v_l) &= 0; j = 1, \cdots, E \end{aligned} \tag{2.1}$$

serta Hukum Kirchoff di simpul :

$$\sum_{k \in \mathcal{B}} a_{k\ell} i_k = 0, \qquad \forall \ell \in \mathcal{N}. \tag{2.2}$$

Tuliskan :

$$\mathbf{j} = [i_1 i_2 \cdots i_E]^t; \qquad \mathbf{v} = [v_1 v_2 \cdots v_I v_{I+1} \cdots v_{I+\beta}]^t.$$

Dengan anggapan bahwa elektroda terakhir di bumikan, dan penomoran simpul dilakukan sedemikan rupa sehingga nomor simpulnya merupakan nomor buntut. Maka, kolom terakhir dari matriks *insidensi* akan dibuang [17]. Tuliskan A sebagai matriks dari A_0 setelah kolom

[1]Istilah matriks insidensi disajikan agak berbeda dari satu buku ke buku yang lain, meski pun secara esensial identik [1][4][17], di sini kita gunakan representasi di [17], sementara di buku yang lain, transposisinya yang disebut sebagai matriks insidensi.

terakhirnya dibuang, tanpa kehilangan keumuman, A kita sebut matriks insidensi.

Maka dari (2.1) dan (2.2) akan diperoleh sebuah sistem persamaan linear berikut :

$$\begin{pmatrix} R & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

dengan $R = \mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_E)$, dan A matriks insidensi.

Akibat pengurutan nomor simpul dengan menomori terlebih dulu simpul di bagian dalam, kemudian mengikuti terkemudian simpul pada batas, kita peroleh partisi matriks sebagaimana berikut ini :

$$A = (A_I | A_\beta); \qquad A_I \in (\{-1, 0, 1\})^{E \times I}, A_\beta \in (\{-1, 0, 1\})^{E \times \beta},$$

maka persamaan (2.3) dapat dituliskan dalam bentuk partisi :

$$\begin{pmatrix} R & [A_I A_\beta] \\ \begin{bmatrix} A_I^t \\ A_\beta^t \end{bmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

Bila input diberikan dalam bentuk arus pasangan dipol pada batas :

$$\mathbf{q}_\beta = \begin{cases} \pm 1; j \neq k & \text{sepasang node di batas} \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Apabila dilakukan pengukuran dari batas sebanyak m kali pengukuran dengan input arus pasangan dipol yang semuanya berbeda, kita peroleh sebuah persamaan matriks :

$$K[a_1 \cdots a_m] = [b_1 \cdots b_m]$$

dengan K merupakan matriks sisi kiri di (2.4), dan kolom di ruas kanan berasal dari eksitasi arus input.

2.1. **Rangkaian Resistor Bujur Sangkar (*Square Network*).** Dalam bagian ini, akan ditinjau kasus khusus rangkaian resistor di bidang. Untuk setiap bilangan bulat positif n, sebuah jala resistor Ω_h dibangun dengan cara sebagai berikut. Simpul (*nodes*) dari Ω_h ialah titik kisi di bidang $p = (i, j)$ dengan $0 \leq i \leq n+1$ dan $0 \leq j \leq n+1$, dengan tidak mengikutkan titik di sudut $(0, 0), (n+1, 0), (0, n+1), (n+1, n+1)$. Titik simpul dari Ω_h kita notasikan dengan Ω_0. *Interior* dari Ω_0, sebut $\mathrm{int}(\Omega_0)$, terdiri dari titik simpul $p = (i, j)$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$. *Batas* dari Ω_0, sebut $\partial\Omega_0$, ialah $\Omega_0 \backslash \mathrm{int}(\Omega_0)$. Setiap titik interior p memiliki 4 simpul tetangga, masing-masing bertempat di satu kisi terdekat di atas, kanan, bawah, dan kiri; himpunan tetangga dari simpul p, kita tuliskan $\mathcal{N}(p)$. Setiap simpul dalam p, $p \in \mathrm{int}(\Omega_0)$, memiliki sifat semua simpul tetangganya merupakan simpul dalam, $\mathcal{N}(p) \subset \mathrm{int}(\Omega_0)$. Setiap titik p di batas, hanya tepat memiliki satu tetangga, tepatnya satu simpul dalam berada pada jarak satu kisi.

Satu *edge*(sisi) (p, q) di Ω, dengan p dan q di $\mathrm{int}(\Omega_0)$ yang berjarak satu unit kisi, atau simpul batas p dengan tetangganya q yang merupakan titik dalam. Himpunan *edge* disimbolkan dengan Ω_1. Suatu sisi (p, q) dengan p titik batas dan q merupakan titik dalam, disebut *edge* batas.

3. Pemetaan Tegangan ke Arus di Batas (*Dirichlet to Neumann Map*, Λ_γ).

Dengan melakukan eliminasi variabel $\mathbf{j}$ di persamaan (2.3) kita dapatkan :

$$A^t R^{-1} A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q}_\beta \end{pmatrix}$$

Akibat partisi yang diinduksi oleh penomoran simpul, maka akan kita peroleh pemetaam dari tegangan ke arus di batas (*Dirichlet to Neumann map*) dari rangkaian listrik :[10]

$$\mathbf{q}_\beta = \underbrace{[A_\beta^t \cdot R^{-1} \cdot A_\beta - A_\beta^t \cdot R^{-1} \cdot A_I (A_I^t \cdot R^{-1} \cdot A_I)^{-1} A_I^t \cdot R^{-1} \cdot A_\beta]}_{\Lambda_\gamma} \mathbf{v}_\beta \ .$$

Sebaliknya pula, kita dapatkan peta input arus ke tegangan di batas (*Neumann to Dirichlet map*) :

$$\mathbf{v}_\beta = \Lambda_\gamma^\dagger \mathbf{q}_\beta,$$

dengan $[\cdot]^\dagger$ menyatakan invers Moore-Penrose dari $[\cdot]$.

Kedua peta ini mengungkapkan pada kita, bahwa tegangan pada bata selalu dapat diperoleh untuk setiap arus yang menjadi input di batas, demikian pula sebaliknya. Curtis & Morrow [2], membahas sifat-sifat Λ_γ untuk rangkaian bujur sangkar.

4. Hubungan rangkaian resistor dan Diskretisasi Elemen Hingga Campuran.

Perhatikan analogi sebagaimana diperlihatkan di tabel berikut :

Rangkaian Listrik	Elemen Hingga Campuran
simpul	Elemen
edge	edge Elemen

Dengan pemilihan basis elemen hingga Raviart-Thomas orde terkecil untuk approksimasi Elemen Hingga, analogi di atas akan menghasilkan struktur matriks yang serupa, bandingkan dengan hasil di [8]. Sejalan dengan pemikiran di atas, akan diperoleh pula pemetaan Λ_γ dan $\Lambda_\gamma^\dagger$ hasil diskretisasi elemen hingga yang serupa.

References

[1] N.L. Biggs, Algebraic Graph Theory, Oxford University Press.

[2] E.B. Curtis & J.A. Morrow, The Dirichlet to Neumann Map for a Resistor Network, SIAM J.Appl.Math., **50**(1991), 1011-1029.

[3] A. R. Daniels, R. G. Green, & Basarab-Horwath, Modelling of three dimensional resistive discontinuities using HSPICE, Meas. Sci. Tech., **v 7**, 338-442

[4] N. Deo, Graph Theory and its Applications, Prentice-Hall India.

[5] K. A. Dines & R. J. Lyttle, 1981, Analysis of electrical conductivity imaging, Geophysics, **v 46**, 1025-1036

[6] A. D. Garnadi, 1997, Electrical Impedance Tomography Based on Mixed Finite Element Model, Proceedings CMSE97, IV.C.6-1-IV.C.6-7

[7] A. D. Garnadi, 2004, Discrete Resistance Tomography, Proc. HPA, Yogyakarta.

[8] A. D. Garnadi, 2004, Mixed Finite Element formulation of Forward Problem of EIT on Quadrilateral, dalam pengerjaan.

[9] P. Hua & E. J. Woo, 1990, Reconstruction Algorithms, in [18], 97-137

[10] M. A. Hussain, B. Noble, & B. Becker, 1989, Computer simulation of an Inverse Problem for Electric Current Tomography using A Uniform Triangular Discretization, IEEE Eng. Med. Biol. Soc. 11th Ann. Int. Conf.,448-450

[11] C. Johnson, 1990, Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press

[12] W. R. B. Lionheart, S. B. Arridge, M. Scweizer, M. Vauhkonen, & J. P. Kaipio, **E**lectrical **I**mpedance and **D**iffuse **O**ptical Tomography **R**econstruction **S**oftware, 1st World Congress in Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14-17, 1999

[13] T. Murai & Y. Kagawa, 1985, Electrical Impedance Tomography Based on a Finite Element Model, IEEE Trans. Biomed. Eng., v BME-32, 177-184

[14] J. C. Newell, 1996, State of the art in Impedance Imaging, Lecture Notes distributed at College on medical Physics : Methods, Instrumentation and Techniques in Medical Imaging, 9-27 September 1996, ICTP, Trieste

[15] F. Santosa, 1994, Inverse problems holds key to safe, continuous imaging, SIAM News, vol 27(6), p1

[16] A. Plaskowski, M. S. Beck, R. Thorn, & T. Dyakowski, 1995, Imaging Industrial Flows: Applications of electrical process, Institute of Physics Publishing

[17] G. Strang, 1986, Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press

[18] J. G. Webster (ed), 1990, Electrical Impedance Tomography, Adam Hilger

[19] T. J. Yorkey, 1990, Electrical impedance tomography with piecewise polynomial conductivities, J. Comp. Phys., **91**, 344-360