

PENDUGAAN *LIFE TABLE* PENDUDUK WANITA INDONESIA DAN PENGEMBANGANNYA MENJADI *LIFE TABLE* KONTINU

T. PURWIANTI¹, H. SUMARNO², E. H. NUGRAHANI³

Abstrak

Data mortalitas suatu negara biasanya disajikan dalam bentuk *life table*. *Life table* yang dimiliki Indonesia saat ini adalah *life table* diskret. Dalam penelitian ini telah diduga *life table* wanita Indonesia menggunakan data yang diklasifikasikan menurut kelompok umur ibu dan menggunakan data intersurvei hipotetik kohort diambil dari sensus penduduk tahun 2000 dan 2010 serta survei penduduk antar sensus tahun 2005. Model kontinu dari suatu *life table* akan lebih menguntungkan dalam penggunaannya. Misalnya dalam bidang asuransi *life table* kontinu dapat dengan mudah digunakan untuk menentukan besar premi yang akan dibayarkan oleh nasabah asuransi. Oleh karena itu, karya ilmiah ini bertujuan untuk menduga model kontinu dari *life table* wanita Indonesia menggunakan fungsi sebaran Weibull, log-logistik, gamma, dan eksponensial. Model kontinu dari sebaran tersebut di *fitting* dengan *life table* diskret yang telah didapatkan sebelumnya kemudian dipilih model yang memiliki kemiripan paling tinggi dengan *life table* diskret. Hasil yang didapatkan adalah *life table* diskret wanita Indonesia memiliki angka harapan hidup (AHH) sebesar 69.72, sedangkan *life table* yang dimiliki BPS memiliki AHH 65.35. *Life table* kontinu yang diduga menggunakan sebaran Weibull, log-logistik, gamma, dan eksponensial berturut-turut memiliki AHH 73.74, 74.90, 87.56, 72.17. Simpulan yang didapat adalah fungsi sebaran eksponensial paling baik untuk menduga model kontinu dari *life table* penduduk wanita Indonesia.

Kata kunci: *Life table* kontinu, Weibull, log-logistik, gamma, eksponensial

1 PENDAHULUAN

Life table adalah skema untuk mengekspresikan fakta-fakta dari probabilitas kematian dan bertahan hidup pada interval waktu tertentu berdasarkan kelompok usia sehingga kesimpulan tentang probabilitas kematian dan bertahan hidup dapat dengan mudah ditarik [5]. *Life table* sangat erat hubungannya dengan mortalitas

¹ Mahasiswa S2, Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. Email: tripurwianti@gmail.com

² Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: hadisumarno@yahoo.com

³ Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: e_nugrahani@ipb.ac.id

atau kematian. Mortalitas adalah angka kematian yang terjadi pada kurun waktu dan tempat tertentu yang dikaitkan oleh keadaan tertentu [2].

Salah satu manfaat *life table* adalah sebagai landasan untuk memproyeksikan jumlah penduduk beberapa tahun ke depan, sehingga para ahli dapat memprediksi langkah apa yang harus diambil untuk menghadapi populasi yang akan datang. *Life table* juga sangat berguna dalam bidang asuransi, seperti definisinya *life table* dapat membaca probabilitas kematian dan bertahan hidup seseorang sehingga pihak asuransi dapat mengetahui kapan nasabah membutuhkan klaim asuransi (tentunya dilengkapi dengan data lain seperti riwayat kesehatan nasabah) dengan begitu pihak perusahaan dapat memperhitungkan berapa besar premi yang cocok untuk nasabah tersebut agar perusahaan tidak mengalami kerugian.

Seperti halnya model-model yang ada dalam bidang demografi, model teoritis dari *life table* merupakan model yang kontinu. Model kontinu dari *life table* akan lebih mudah digunakan dan akan sangat menguntungkan dalam penggunaannya karena bisa digunakan pada umur sembarang sesuai yang kita inginkan. Dalam kepentingan proyeksi penduduk apabila tingkat kematian berubah dari waktu ke waktu, maka penghitungan *life table* menjadi sangat rumit sehingga diperlukan *life table* yang bersifat kontinu. Namun, pada umumnya *life table* disajikan dalam bentuk diskret.

Penyusunan *life table* dapat dengan mudah dilakukan jika terdapat data yang dibutuhkan, untuk menyusunnya seperti data banyaknya penduduk yang bertahan hidup atau angka harapan hidup (AHH) penduduk Indonesia, tetapi sayangnya data tersebut sangat sulit didapatkan secara langsung apalagi di negara berkembang seperti Indonesia.

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Purwianti [7] telah diduga tiga *life table* wanita Indonesia menggunakan tiga metode yang berbeda, tetapi masih menghasilkan *life table* diskret dan metode yang digunakan masih bergantung pada model Barat serta masih menggunakan asumsi bahwa pendugaan *life table* berlaku bagi umur anak yaitu umur 0 sampai 10 tahun. Model kontinu dari *life table* telah diamati oleh Fajariyah [4] yaitu dengan sebaran Weibull, log-normal dan log-logistik, tetapi model yang dihasilkan kurang representatif dalam menggambarkan perilaku data. Oleh karena itu, penelitian ini menduga *life table* anak berdasarkan informasi anak yang lahir dan anak yang bertahan untuk menghilangkan asumsi bahwa pendugaan *life table* berlaku bagi umur anak, yaitu umur 0 sampai 10 tahun pada *life table* yang didapatkan oleh Purwianti [7]. Hasilnya akan dibandingkan untuk mendapatkan *life table* terbaik yaitu yang paling mirip polanya dengan data asli kemudian akan diduga model kontinu dari *life table* tersebut.

2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Mortalitas dan *Lifa Table*

Mortalitas atau kematian merupakan salah satu dari tiga komponen utama demografi yang berpengaruh terhadap struktur dan jumlah penduduk [8]. Data mortalitas disajikan dalam bentuk *life table* yaitu sarana penyajian informasi mengenai probabilitas bertahan hidup dan mortalitas pada sebagian interval waktu berdasarkan usia, dan dengan cara sedemikian rupa sehingga kesimpulan tentang kemungkinan kematian dan ketahanan hidup dapat dengan mudah ditarik [5].

Komponen-komponen *life table* antara lain banyak orang yang bertahan hidup l_x , banyak orang yang mati d_x , peluang bertahan hidup P_x , peluang orang mati q_x , banyak tahun hidup L_x , total waktu hidup T_x , dan rata-rata tahun hidup \dot{e}_x . Nilai l_x diperoleh dari hasil pendugaan *level* mortalitas penduduk suatu negara, sedangkan untuk nilai dari komponen lain pada suatu *life table* dapat diperoleh dengan rumus berikut:

$$\begin{aligned}
 & \bullet d_x = l_x - l_{x+1} & \bullet \dot{e}_x &= \frac{T_x}{l_x} \\
 & \bullet q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} & \bullet n d_x &= l_x - l_{x+n} \\
 & \bullet L_x = l_x - \frac{1}{2} d_x = \frac{1}{2} (l_x + l_{x+1}) & \bullet n q_x &= \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \\
 & \bullet P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} & \bullet n L_x &= l_x - \frac{n}{2} d_x = \frac{n}{2} (l_x + l_{x+n}) \\
 & \bullet m_x = \frac{d_x}{L_x} & \bullet {}_t P_x &= \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad [1] \\
 & \bullet T_x = \sum_x^\omega L_x
 \end{aligned}$$

2.2 Fungsi sebaran

Sebaran Weibull merupakan bentuk umum dari sebaran eksponensial. Fungsi kepekatan peluang dari sebaran Weibull adalah

$$f(x; \lambda, \gamma) = \begin{cases} \frac{\lambda x^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\lambda}}{\gamma^\lambda} & ; x > 0, \lambda > 0, \gamma > 0 \\ 0 & ; x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Dengan fungsi *survival* dalam hal ini disebut juga $l(x)$ sebaran Weibull

$$l(x) = e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\lambda}$$

Karena $F(x) = \int_0^x f(u)du$, maka $F(x) = \int_0^x \lambda \gamma^{-\lambda} u^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{u}{\gamma}\right)^\lambda} du$.

Misal $l(u) = e^{-\left(\frac{u}{\gamma}\right)^\lambda}$ maka $dl = -\frac{\lambda}{\gamma} \left(\frac{u}{\gamma}\right)^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{u}{\gamma}\right)^\lambda} du$, sehingga

$$\int_0^x -\frac{\lambda}{\gamma} \left(\frac{u}{\gamma}\right)^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{u}{\gamma}\right)^\lambda} du = \int_0^x dl$$

$$\int_0^x \frac{\lambda}{\gamma} \left(\frac{u}{\gamma}\right)^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{u}{\gamma}\right)^\lambda} du = - \int_0^x dl$$

$$F(x) = -l \Big|_0^x$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\lambda}.$$

Jadi $l(x) = 1 - F(x)$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\lambda}\right)$$

$$= e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\lambda}.$$

[6]

Sebaran log-logistik memiliki fungsi kepekatan peluang dan fungsi sebaran sebagai berikut

$$f(x; \theta, k) = \begin{cases} \frac{e^\theta k x^{k-1}}{(1 + e^\theta x^k)^2} & ; x > 0, \theta > 0, k > 0 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^\theta k y^{k-1}}{(1 + e^\theta y^k)^2} dy$$

Misal $u = 1 + e^\theta y^k$

$$du = k e^\theta y^{k-1} dy$$

$$dy = \frac{du}{k e^\theta y^{k-1}},$$

maka

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^\theta k y^{k-1}}{(1 + e^\theta y^k)^2} dy$$

$$= \int_0^x \frac{e^\theta k y^{k-1}}{u^2} \frac{du}{k e^\theta y^{k-1}}$$

$$= -(u)^{-1} \Big|_0^x$$

$$= \frac{1 + e^\theta x^k - 1}{1 + e^\theta x^k}.$$

Jadi,

$$F(x) = \frac{e^\theta x^k}{1 + e^\theta x^k}.$$

Fungsi *survival* atau dalam kasus ini disebut juga $l(x)$ dari sebaran log-logistik adalah

$$\begin{aligned} l(x) &= 1 - F(x) \\ &= 1 - \frac{e^{\theta} x^k}{1 + e^{\theta} x^k} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\theta} x^k}. \end{aligned}$$

Sebaran eksponensial merupakan sebaran yang paling sederhana dan banyak digunakan dalam masalah bertahan hidup atau pertumbuhan populasi makhluk hidup. Sebaran eksponensial hanya memiliki satu parameter yaitu λ , yang menunjukkan penskalaan. Fungsi kepekatan peluang dari sebaran eksponensial ialah

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 & ; x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Sebaran gamma memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & ; x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & ; x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

2.3 Penelitian Sebelumnya

Purwianti [7] telah menduga *life table* wanita Indonesia berdasarkan data sensus dengan terlebih dahulu menghitung rasio bertahan hidup kohort *smoothed* menggunakan tiga cara yaitu menggunakan *life table* Coale-Demeny, sistem logit dan proyeksi akumulasi. Didapatkan angka harapan hidup (AHH) berturut-turut 63.91, 58.46, dan 69.61. Disimpulkan bahwa pola $l(x)$ yang dihasilkan dari cara 1 paling mendekati pola $l(x)$ yang dimiliki BPS, artinya pendugaan *life table* dengan cara 1 yang paling mendekati *life table* yang dimiliki BPS.

3 METODE

Metode yang digunakan untuk menduga *life table* penduduk wanita Indonesia adalah sebagai berikut:

1. menduga mortalitas anak dengan menggunakan 2 cara berikut:
 Cara 1: Menggunakan data yang diklasifikasikan menurut kelompok umur ibu,
 Cara 2: Menggunakan data untuk intersurvei hipotetik kohort,
2. menyusun *life table* wanita,
3. menduga model kontinu.

4 MENDUGA MORTALITAS ANAK

Mortalitas anak dibentuk menggunakan dua cara, cara yang pertama yaitu mortalitas anak yang dibentuk menggunakan data yang diklasifikasikan menurut kelompok umur ibu dan cara yang kedua yaitu mortalitas anak yang dibentuk menggunakan data intersurvei hipotetik kohort.

Cara pertama menggunakan data banyak anak yang lahir dan mati yang diklasifikasikan menurut kelompok umur ibu tahun 2010. Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan rata-rata paritas anak $P(i)$ untuk setiap kelompok umur ibu. Langkah kedua menentukan proporsi anak meninggal menurut kelompok umur ibu $D(i)$, langkah ketiga menghitung pengali Trussell $k(i)$, langkah ketiga menghitung probabilitas mati $q(x)$ dan probabilitas bertahan $l(x)$. Selanjutnya langkah kelima menentukan periode referensi $t(x)$ untuk mencari tahu kira-kira berapa tahun sebelum survey dugaan mortalitas anak tersebut berlaku. Langkah selanjutnya menentukan *level* mortalitas untuk setiap kelompok umur setelah itu untuk mengetahui *level* mortalitas anak yang tunggal dicari rata-rata dari *level* mortalitas semua kelompok umur. Didapatkan rata-rata *level* mortalitas 21.55. Probabilitas bertahan dan mati untuk *level* mortalitas 21.55 dicari menggunakan *life table* model Barat Coale Demeny. Hasilnya ditampilkan pada Tabel 1.

Tabel 1
Probabilitas bertahan hidup anak $l(x)$ dan probabilitas kematian $q(x)$ menggunakan model barat di Indonesia tahun 2010

Umur x (1)	Probabilitas bertahan hidup $l(x)$			Probabilitas kematian $q(x)$ (5)
	<i>Level</i> 21 (2)	<i>Level</i> 22 (3)	<i>Level</i> 21.55 (4)	
0	1	1	1	0.0264
1	0.9691	0.9774	0.9736	0.0028
2	0.9656	0.9753	0.9710	0.0014
3	0.9639	0.9743	0.9696	0.0010
4	0.9626	0.9735	0.9686	0.0008
5	0.9616	0.9729	0.9678	0.0027
10	0.9584	0.9707	0.9652	-

Cara kedua untuk menentukan mortalitas anak adalah menggunakan data intersurvei hipotetik kohort yaitu data anak yang lahir dan mati menurut kelompok umur ibu untuk waktu survey yang berbeda yaitu tahun 2005 dan 2010. Langkah pertama, menghitung rata-rata paritas anak untuk setiap kelompok umur ibu dan setiap waktu survei, $P(i, j)$ dengan i menyatakan kelompok umud dan j menyatakan waktu survei. Langkah kedua, menghitung rata-rata jumlah anak mati setiap kelompok umur dan setiap waktu survei, $ACD(i, j)$. Langkah ketiga menduga

proporsi anak mati untuk hipotetik kohort, $D(i, s)$ dengan s melambangkan hipotetik kohort, diduga dengan membagi rata-rata jumlah anak meninggal untuk hipotetik kohort, $ACD(i, s)$ dengan rata-rata paritas untuk hipotetik kohort, $P(i, s)$. Rata-rata jumlah anak meninggal untuk hipotetik kohort, $ACD(i, s)$ dan rata-rata paritas untuk hipotetik kohort, $P(i, s)$ didapatkan dengan

$$ACD(i, s) = ACD(i, 2) - ACD(i - n, 1) + ACD(i - n, s),$$

$$P(i, s) = P(i, 2) - P(i - n, 1) + P(i - n, s),$$

dengan n adalah interval lima tahun, dalam hal ini $n = 1$ karena antara survei satu dan dua berjarak lima tahun. Langkah keempat menduga probabilitas kematian dengan terlebih dahulu menghitung pengali Trussell, $k(i)$. Selanjutnya dicari *level* mortalitas untuk setiap kelompok umur, dan untuk *level* mortalitas anak yang tunggal dicari rata-rata dari *level* mortalitas dari semua kelompok umur. Didapatkan *level* mortalitas untuk cara kedua adalah 22.13. Probabilitas bertahan dan mati untuk *level* mortalitas 21.13 dicari menggunakan *life table* model Barat Coale Demeny. Hasilnya ditampilkan pada Tabel 2.

Tabel 2
 Probabilitas bertahan hidup anak $l(x)$ dan probabilitas kematian $q(x)$ menggunakan model barat di indonesia tahun 2005-2010

Umur x (1)	Probabilitas bertahan hidup $l(x)$			Probabilitas kematian $q(x)$ (5)
	<i>Level</i> 22 (2)	<i>Level</i> 23 (3)	<i>Level</i> 22.13 (4)	
0	1	1	1	0.0217
1	0.9774	0.9848	0.9783	0.0020
2	0.9753	0.9838	0.9764	0.0010
3	0.9743	0.9832	0.9754	0.0007
4	0.9735	0.9828	0.9747	0.0006
5	0.9729	0.9825	0.9741	0.0021
10	0.9707	0.9812	0.9721	-

5 MENYUSUN *LIFE TABLE* WANITA INDONESIA

Life table wanita Indonesia disusun dengan mengombinasikan mortalitas anak perempuan yang telah didapatkan sebelumnya dengan *life table* wanita dewasa yang telah dibentuk oleh Purwianti [7]. Didapatkan empat *life table* kombinasi berikut ini:

1. Kombinasi 1, yaitu *life table* wanita dewasa yang di *smoothing* menggunakan *life table* Coale-Demeny dikombinasikan dengan mortalitas anak perempuan menggunakan data yang diklasifikasikan menurut kelompok umur.

2. Kombinasi 2, yaitu *life table* wanita dewasa yang *dismoothing* menggunakan *life table* Coale-Demeny dikombinasikan dengan mortalitas anak perempuan menggunakan data untuk intersurvei hipotetik kohort.
3. Kombinasi 3, yaitu *life table* wanita dewasa yang *dismoothing* menggunakan proyeksi akumulasi dikombinasikan dengan mortalitas anak perempuan menggunakan data yang diklasifikasikan menurut kelompok umur ibu.
4. Kombinasi 4, yaitu *life table* wanita dewasa yang *dismoothing* menggunakan proyeksi akumulasi dikombinasikan dengan mortalitas anak perempuan menggunakan data untuk intersurvei hipotetik kohort.

Selanjutnya empat *life table* tersebut akan dibandingkan dengan data asli untuk mendapatkan *life table* yang paling mirip polanya dengan data asli, termasuk juga *life table* yang dibentuk menggunakan sistem logit [7] dan *life table* yang diduga oleh BPS. Koefisien determinasi atau tingkat kecocokan dari perbandingan tersebut ditampilkan pada Tabel 3.

Tabel 3
Koefisien determinasi atau R^2 dan AHH dari *life table* dugaan dengan data asli

	<i>Life table</i>					
	Kombinasi 1	Kombinasi 2	Kombinasi 3	Kombinasi 4	Sistem logit	Dugaan BPS
R^2	78.50%	78.70%	33.40%	81.30%	75%	76.10%
AHH	66.28	66.74	74.10	69.72	58.46	65.35

Life table kombinasi 4 selanjutnya dilengkapi menggunakan *life table* wanita model Barat Coale-Demeny dengan angka harapan hidup (AHH) 69.72, seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.

Tabel 4
Life table penuh penduduk wanita Indonesia yang diduga menggunakan proyeksi akumulasi dikombinasikan dengan mortalitas anak cara kedua

x	l_x	x	l_x
(1)	(2)	(3)	(4)
0	100 000	55	88 757
1	97 835	60	84 857
5	97 410	65	78 937
10	97 208	70	69 805
15	97 031	75	50 639
20	96 732	80	19 576
25	96 326	85	10 015
30	95 810	90	3 418
35	95 182	95	688
40	94 351	100	75
45	93 168	105	5
50	92 162	110	0

6 MENDUGA *LIFE TABLE* KONTINU

Tabel 4 memperlihatkan bahwa hingga umur 110 tahun jumlah penduduk baru mencapai 0 dapat dikatakan 110 adalah umur tertua bagi penduduk wanita Indonesia jika populasi awalnya 100 000 orang. Pendugaan model kontinu dari *life table* terpilih dilakukan dengan *fitting* model sebaran Weibull, log-logistik, eksponensial, dan gamma dengan bantuan Mathematica 9.0.

6.1 Menduga Model Kontinu Menggunakan Sebaran Weibull

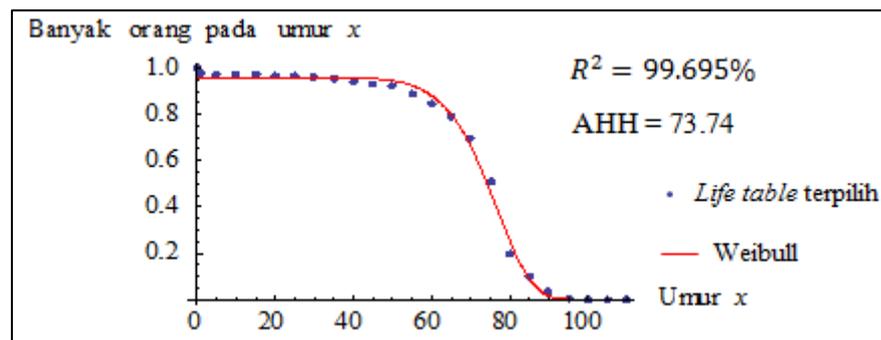
Fungsi $l(x)$ dari sebaran Weibull yang telah sedikit dimodifikasi memiliki tiga parameter dengan bentuk persamaan sebagai berikut

$$l(x) = a_1 e^{-\left(\frac{1}{a_2}x\right)^{a_3}},$$

dengan menggunakan *fitting* model pada model tersebut dihasilkan nilai parameter $a_1 = 0.959137$, $a_2 = 77.6521$ dan $a_3 = 9.57144$ sehingga persamaan fungsi $l(x)$ pada sebaran Weibull ialah

$$l(x) = 0.959137 e^{-\left(\frac{1}{77.6521}x\right)^{9.57144}}.$$

Hasil pendugaan model kontinu menggunakan sebaran Weibull ditampilkan pada Gambar 1.



Gambar 1 Plot data banyak orang berumur x dari *life table* terpilih dan fungsi $l(x)$ menggunakan sebaran Weibull

Pada gambar diatas terlihat bahwa sebaran Weibull hampir menutupi semua titik-titik dari plot data *life table* terpilih dengan kemiripipan model 99.695% dan AHH 73.74.

6.2 Menduga Model Kontinu Menggunakan Sebaran Log-logistik

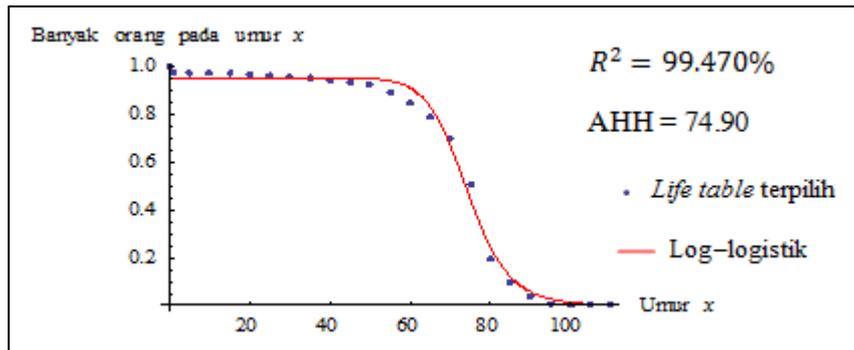
Fungsi $l(x)$ dari sebaran log-logistik yang telah sedikit dimodifikasi memiliki tiga parameter dengan bentuk persamaan sebagai berikut

$$l(x) = \frac{a_1}{1 + e^{-a_2 x^{a_3}}},$$

dengan menggunakan *fitting* model pada model tersebut dihasilkan nilai parameter $a_1 = 0.95155$, $a_2 = 61.8473$ dan $a_3 = 14.3558$ sehingga persamaan fungsi $l(x)$ pada sebaran log-logistik ialah

$$l(x) = \frac{0.95155}{1 + e^{-61.8473x^{14.3558}}}$$

Hasil pendugaan model kontinu menggunakan sebaran log-logistik ditampilkan pada Gambar 2.



Gambar 2 Plot data banyak orang berumur x *life table* terpilih dan fungsi $l(x)$ menggunakan sebaran log-logistik

Pada gambar diatas terlihat bahwa sebaran log-logistik memiliki kemiripan dengan *life table* terpilih sebesar 99.470% dan AHH 74.90.

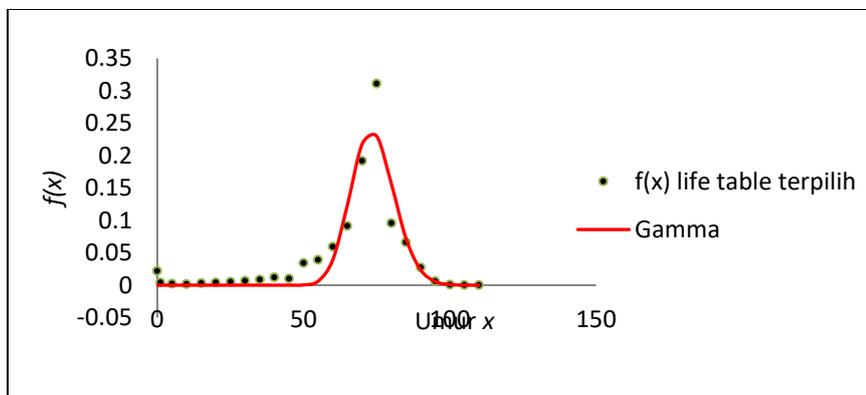
6.3 Menduga Model Kontinu Menggunakan Sebaran Gamma

Life table yang memiliki pola mirip sebaran gamma adalah $f(x)$ dengan rumus untuk *life table* diskret sebagai berikut

$$f_i(x) = F_{i+1}(x) - F_i(x); F(x) = 1 - l(x), \text{ atau}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x); F(x) = 1 - l(x).$$

Plot $f(x)$ dari *life table* terpilih menyerupai atau mendekati pola sebaran gamma, dapat dilihat pada Gambar 3.

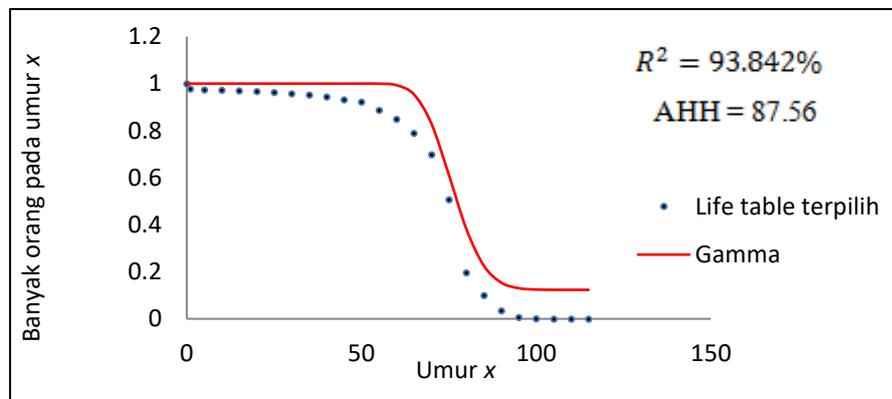


Gambar 3 Plot $f(x)$ *life table* terpilih dan $f(x)$ dari sebaran gamma

Oleh karena itu, akan dilakukan pendugaan fungsi menggunakan fungsi kepekatan peluang sebaran gamma yang paling mendekati pola $f(x)$. Sebaran gamma yang telah dimodifikasi sedikit memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut

$$f(x) = \frac{a_1}{a_3 a_2 \Gamma(a_2)} x^{a_2-1} e^{-\frac{x}{a_3}} .$$

Kemudian dengan menggunakan *fitting* model pada Mathematica 9.0 dihasilkan nilai konstanta $a_1 = 4.38394$, $a_2 = 100$ dan $a_3 = 0.738245$. Selanjutnya akan dicari pola $l(x)$ yang dibentuk dari fungsi kepekatan peluang gamma $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ dan $l(x) = 1 - F(x)$. Dengan kurva $l(x)$ yang didapatkan ditampilkan pada Gambar 4.



Gambar 4 Plot *life table* terpilih dan fungsi $l(x)$ menggunakan sebaran gamma

6.4 Menduga Model Kontinu Menggunakan Sebaran Eksponensial

Pola plot $l(x)$ secara kasat mata tidak menyerupai bentuk fungsi eksponensial yang kita kenal selama ini. Oleh karena itu, nilai $l(x)$ akan di transformasi menggunakan sistem logit agar bisa diduga model kontinunya menggunakan sebaran eksponensial. Transformasi logit mengikuti persamaan berikut

$$logit(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{100\,000 - l(x)}{l(x)} \right).$$

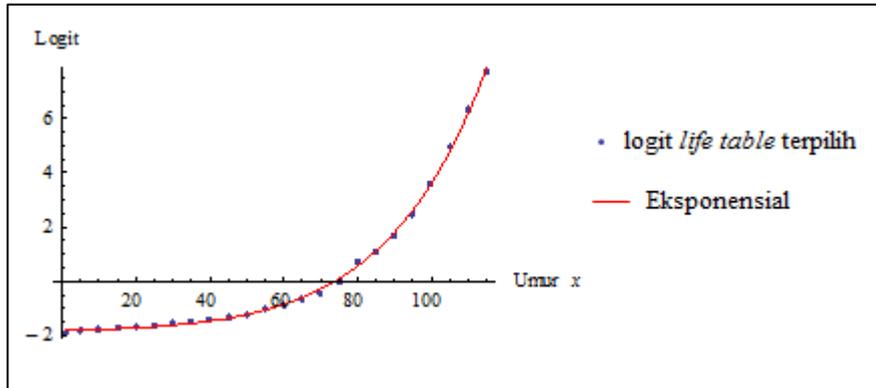
Fungsi kepekatan peluang sebaran eksponensial yang telah dimodifikasi memiliki empat parameter dengan bentuk persamaan sebagai berikut

$$logit(x) = a_1 e^{a_2 x^{a_3}} - a_4 ,$$

dengan menggunakan *fitting* model pada model tersebut dihasilkan nilai parameter $a_1 = 0.0116226$, $a_2 = 0.312694$ dan $a_3 = 0.64669$, $a_4 = 1.81989$ sehingga persamaan fungsi $logit(x)$ pada sebaran eksponensial ialah

$$logit(x) = 0.0116226 e^{0.312694 x^{0.64669}} - 1.81989 .$$

Plot fungsi logit dari model eksponensial ditampilkan pada Gambar 5. Pada Gambar 5 terlihat bahwa fungsi logit eksponensial menutupi hampir semua titik fungsi logit dari *life table* terpilih.

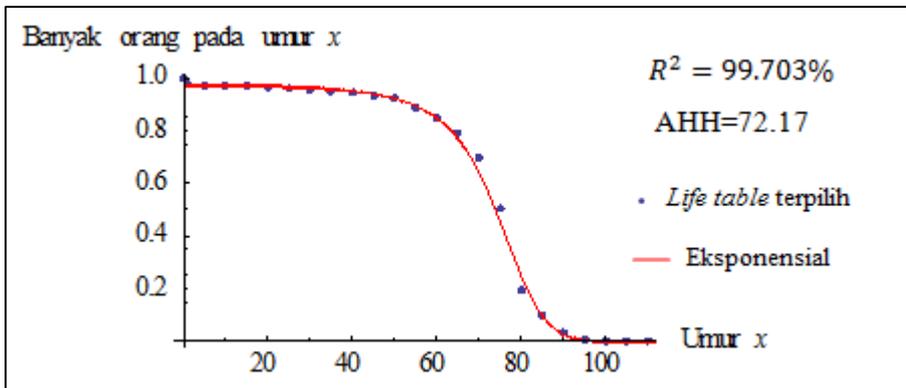


Gambar 5 Plot $logit(x)$ dari *life table* terpilih dan kurva model eksponensial

selanjutnya fungsi $logit(x)$ ditransformasi balik agar mendapatkan pola $l(x)$ dengan cara berikut

$$l(x) = \frac{1}{\exp(2 \logit(x)) + 1}$$

Hasil transformasi menggunakan persamaan diatas menghasilkan fungsi $l(x)$ dari model eksponensial ditampilkan pada Gambar 6. Model esponensial memiliki AHH sebesar 72.17 dengan kemiripan model sebesar 99.703%.



Gambar 6 Plot *life table* terpilih dan fungsi $l(x)$ menggunakan sebaran eksponensial

Berikut ini ditampilkan koefisien determinasi atau R^2 dari setiap fungsi sebaran di atas untuk melihat fungsi sebaran mana yang paling mendekati atau yang paling mirip dengan *life table* terpilih.

Tabel 5

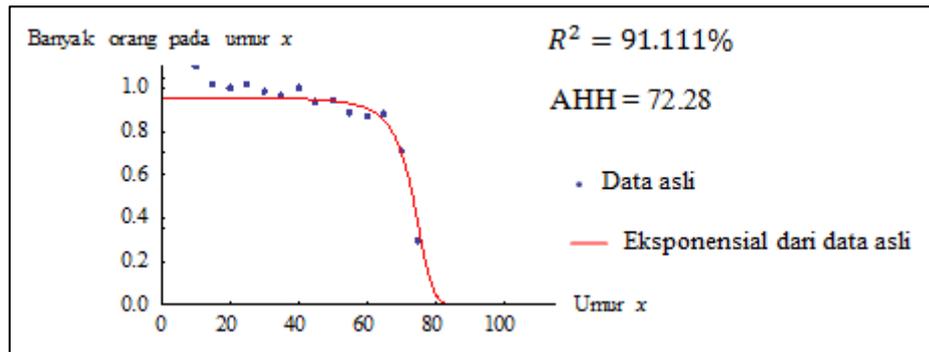
Koefisien determinasi atau R^2 dan AHH dari model kontinu *life table* terpilih

	Fungsi sebaran			
	Weibull	Log-logistik	Gamma	Eksponensial
R^2	99.70%	99.47%	93.84%	99.70%
AHH	73.74	74.90	87.56	72.17

Pada Tabel 5 terlihat bahwa fungsi sebaran yang paling mendekati adalah fungsi sebaran eksponensial. Oleh karena itu, fungsi $l(x)$ dari sebaran eksponensial digunakan untuk menduga parameter *life table* kontinu dari data asli menggunakan *software* Mathematica didapatkan nilai parameter $a_1 = 0.001$, $a_2 = 0.1$, $a_3 = 1$ dan $a_4 = 1.53678$ sehingga fungsi $l(x)$ menjadi

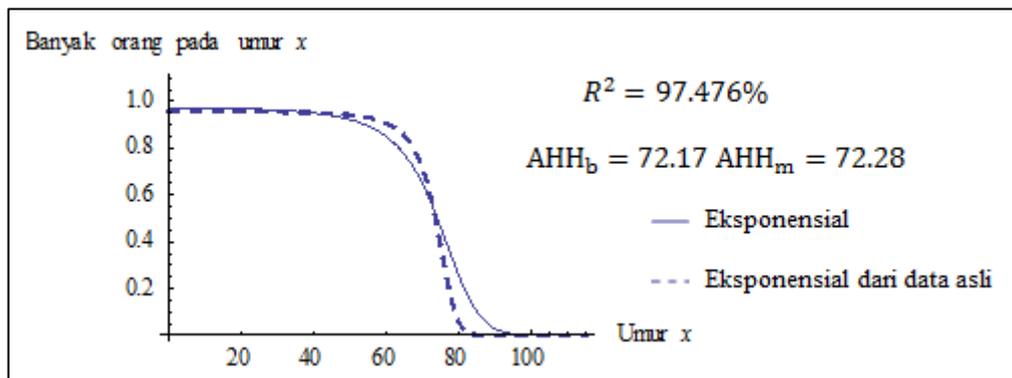
$$l(x) = \frac{1}{\exp(2(0.001e^{0.1x} - 1.53678)) + 1}$$

sehingga ketika model eksponensial dari data asli diatas dibandingkan dengan data asli itu sendiri akan menghasilkan kurva seperti pada Gambar 7.



Gambar 7 Plot data asli dan kurva fungsi $l(x)$ menggunakan sebaran eksponensial dari data asli

Data asli yang dibandingkan dengan model eksponensial dari data asli menghasilkan kemiripan sebesar 91.111% dengan AHH dari model eksponensial dari data asli sebesar 72.28, sedangkan untuk model eksponensial yang didapat dari *life table* terpilih dibandingkan dengan model eksponensial yang didapat dari data asli menghasilkan pola yang mirip seperti pada Gambar 8.



Gambar 8 Plot fungsi eksponensial dengan parameter yang didapatkan dari *life table* terpilih dan dari data asli

Model eksponensial dengan parameter yang didapat dari data asli memiliki pola yang mirip dengan *life table* terpilih dan model kontinu dari *life table* terpilih. Oleh karena itu dapat dikatakan model eksponensial tersebut cukup baik digunakan untuk menduga *life table* wanita Indonesia.

7 SIMPULAN

Berdasarkan hasil pendugaan mortalitas anak perempuan menggunakan data anak yang lahir dan anak yang bertahan kemudian dikombinasikan dengan *life table* wanita dewasa yang diduga menggunakan data sensus oleh Purwianti (2014) didapatkan *life table* terbaik atau yang paling mirip dengan pola data asli adalah *life table* kombinasi 4. *Life table* kombinasi 4, yaitu *life table* wanita dewasa yang di *smoothing* menggunakan proyeksi akumulasi dikombinasikan dengan mortalitas anak perempuan menggunakan data untuk intersurvei hipotetik kohort. Pendugaan *life table* kontinu menggunakan sebaran eksponensial memiliki koefisien determinasi paling tinggi diantara sebaran lain yaitu 99.703%. Dapat disimpulkan bahwa model eksponensial $l(x) = \frac{1}{\exp(2(a_1 e^{a_2 x^{a_3}} - a_4)) + 1}$, paling baik menduga model kontinu dari *life table* penduduk wanita Indonesia. Kemudian model tersebut digunakan untuk menduga parameter dari data asli untuk mendapatkan model eksponensial dari data asli dan ketika model eksponensial dari data asli dibandingkan dengan data asli itu sendiri didapatkan kemiripan yang cukup tinggi yaitu 91.111%. Ketika model eksponensial dari *life table* terpilih dibandingkan dengan model eksponensial dari data asli didapatkan kemiripan sebesar 97.476%. Dengan demikian, dapat dikatakan model eksponensial tersebut cukup baik untuk menduga *life table* wanita penduduk Indonesia.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Brown RL. 1997. *Introduction to the Mathematics of Demography*. Connecticut (USA): ACTEC Publications Inc.
- [2] [BPS] Badan Pusat Statistik. 2009. *Profil Kesehatan Indonesia*. 2008. Jakarta (ID): BPS.
- [3] [DIESA] Department of International Economic and Social Affairs. 1983. *Manual X: Indirect Techniques for Demographic Estimation*. New York (US): United Nation.
- [4] Fajariyah S. 2009. *Analisis Model Peluang Bertahan Hidup dan Aplikasinya*. Tesis. Sekolah Pascasarjana-IPB.
- [5] Keyfitz N. 1968. *Introduction to the Mathematics of Population*. Cambridge, MA: Addison Wesley.
- [6] Lee, E.T. 1992. *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. Ed ke-2. New York: A Wiley Interscience Publication.
- [7] Purwianti T. 2014. *Pendugaan Life table Penduduk Wanita Indonesia berdasarkan Data Sensus*. Skripsi. Departemen Matematika FMIPA-IPB.
- [8] Utomo B. 1985. *Mortalitas: Pengertian dan Contoh Kasus di Indonesia* [catatan penelitian]. Jakarta (ID): Universitas Indonesia.